This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

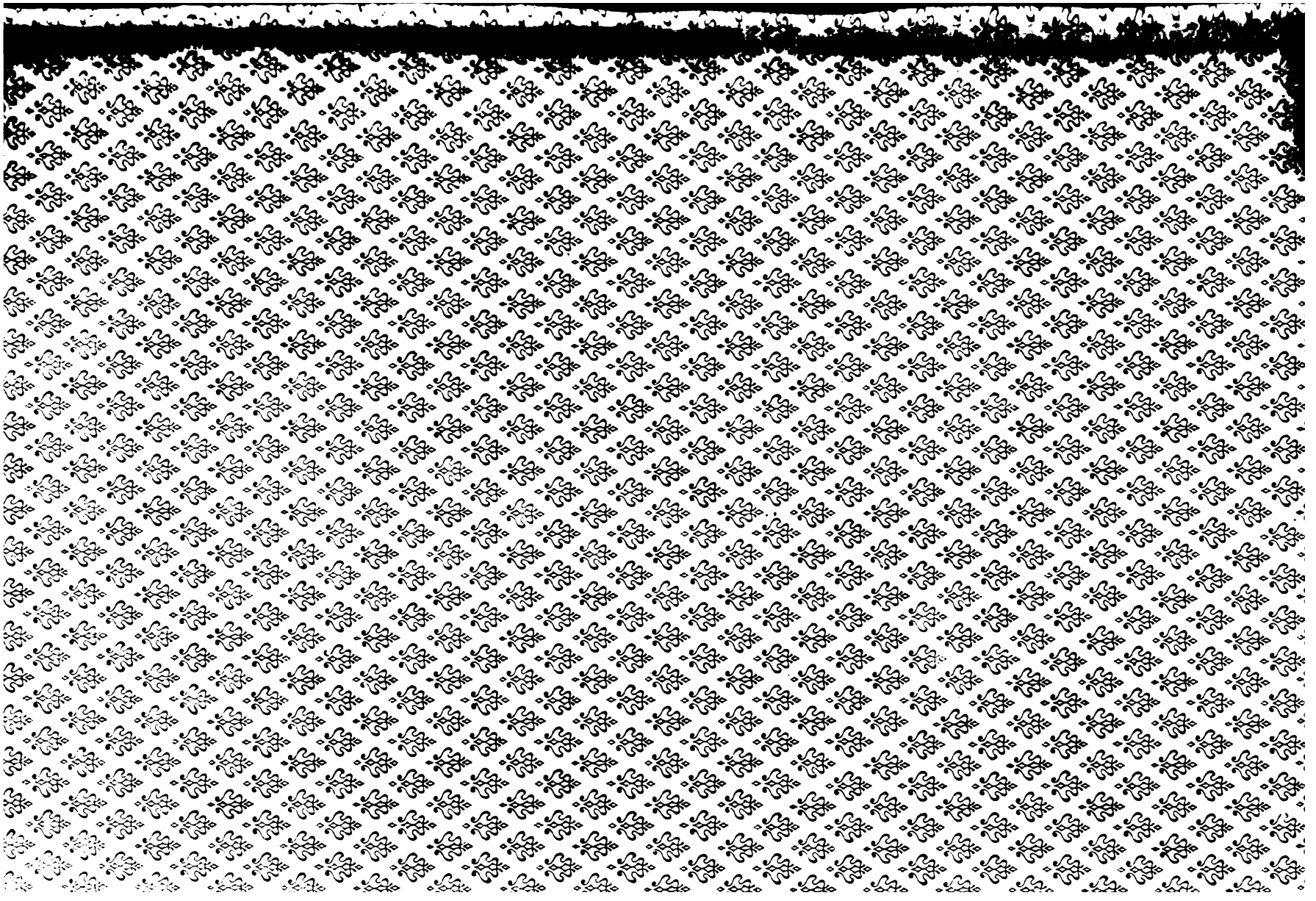
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B 1,237,209

Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford-Messer
Bequest

E F FASER



AS
182
G552

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

122687

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Aus dem Jahre 1899.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1899.

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1899.

G. Bohlmann, Ein Ausgleichungsproblem . . . . . S. 260
P. Gordan, Neuer Beweiss des Hilbert'schen Satzes über homogene Funktionen . . . . . „ 240
Clemens Hartlaub, Zur Kenntniss der Gattungen Margelopsis und Nemopsis . . . . . „ 219
W. Kaufmann, Grundzüge einer elektrodynamischen Theorie der Gasentladungen (I. Mitteilung) . . . „ 243
W. Kaufmann, Grundzüge einer elektrodynamischen Theorie der Gasentladungen (II. Mitteilung) . . . „ 251
S. Kantor, Ein Theorem über Determinanten . . . . „ 272
A. v. Koenen, Ueber das Alter des norddeutschen Wälderthons (Wealden) . . . . . „ 311
H. Liebmann, Eine neue Eigenschaft der Kugel . . . „ 44
H. Liebmann, Beweis zweier Sätze über die Bestimmung von Ovaloïden durch das Krümmungsmass oder die mittlere Krümmung für jede Normalrichtung . . . „ 134
H. Minkowski, Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen „ 64
O. Mügge, Ueber neue Structurflächen an den Krystallen der gediegenen Metalle . . . . . „ 56
F. Nachtikal, Ueber die Proportionalität zwischen den piëzoelektrischen Momenten und den sie hervorrufenden Drucken . . . . . „ 109
W. Nernst, Zur Theorie der elektrischen Reizung . . „ 104
Ernst Neumann, Ueber die Robin'sche Methode zur Bestimmung des elektrostatischen Potentials . . . „ 291
J. Orth, Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen . . . . . „ 143
E. Riecke, Ueber die Arbeit, welche in grösseren Funkenstrecken einer Töplerschen Influenzmaschine verbraucht wird . . . . . „ 34

E. Riecke, Ueber freie Elektricität an der Oberfläche Crookes'scher Röhren . . . . . S. 119
E. Riecke, Ueber den in Radiometern auftretenden Druck „ 166
E. Riecke, Lichtenberg'sche Figuren im Inneren von Röntgenröhren . . . . . „ 225
C. Runge, Ueber ganzzahlige Gleichungen ohne Affect . „ 89
Hermann Th. Simon, Das Wirkungsgesetz des Wehnelt-Unterbrechers . . . . . „ 171
Hermann Th. Simon, Notiz über schnelle Funkenentladungen . . . . . „ 183
A. Schönflies, Ueber die Verteilung der Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkte bei punktweise unstetigen Funktionen einer reellen Variabeln . . . . . „ 187
A. Schönflies, Ueber einen Satz der Analysis Situs . „ 282
W. Voigt, Zur Theorie der Beugung ebener inhomogener Wellen an einem geradlinig begrenzten unendlichen und absolut schwarzen Schirm . . . . . „ 1
W. Voigt, Ueber ein von Herrn Fr. Kohlrausch aufgestelltes Problem der Wärmelehre . . . . . „ 228
W. Voigt, Bmerkungen über die Theorie der sogenannten thermomagnetischen Wirkungen . . . . . „ 302
O. Wallach, Untersuchungen aus den Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VII.) . . . . . „ 122
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VIII.) . . . . . „ 209
E. Wiechert, Seismometrische Beobachtungen im Göttinger geophysikalischen Institut . . . . . „ 195
E. Zermelo, Ueber die Bewegung eines Punktsystems bei Bedingungsgleichungen . . . . . „ 306
R. v. Zeynek, Ueber die Erregbarkeit sensibler Nervenendigungen durch Wechselströme . . . . . „ 94

Zur Theorie der Beugung ebener inhomogener Wellen an einem geradlinig begrenzten unendlichen und absolut schwarzen Schirm.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1899.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich bemerkt, daß eine gewisse Lichterscheinung, die bei dem Vorgang der sogenannten totalen Reflexion auftreten kann, sich wenigstens in Annäherung auffassen läßt als die Wirkung der Beugung einer ebenen Welle mit in der Wellenebene wechselnder Amplitude an einem undurchsichtigen Schirm, dessen geradliniger Rand den in den Wellenebenen liegenden Geraden constanter Amplitude parallel ist. Das hierdurch gegebene Beugungsproblem schien mir bei dem geringen Umfange dessen, was wir überhaupt über das Verhalten inhomogener ebener Lichtwellen wissen, ein über jenes specielle Phänomen hinausreichendes Interesse zu besitzen, und ich habe mich deshalb mit seiner Lösung beschäftigt. Die wichtigeren erlangten Resultate sind im Folgenden zusammengestellt.

1) Die strenge Theorie der Beugung ebener homogener Wellen an einem ebenen, unendlich dünnen und vollkommen reflectirenden Schirm mit einem geradlinigen und den Ebenen der einfallenden Wellen parallelen Rande verdanken wir Herrn Sommerfeld[2]). Ich habe im Anschluß an seine Arbeit darauf hingewiesen[3]), daß der Fall eines absolut schwarzen Schirmes von

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1898, Heft 3.

2) A. Sommerfeld, Math. Ann. Bd. 47, S. 317, 1896.

3) W. Voigt, Kompendium der theoretischen Physik, Leipzig 1896, Bd. II, S. 768.

analoger Gestalt sich ebenfalls mit den von ihm geschaffenen und von mir theilweise umgestalteten Hülfsmitteln erledigen läßt und dabei zu erheblich einfachern Formeln führt.

Der von mir hierbei benutzte Grundgedanke war der, daß man einen dünnen, absolut schwarzen Schirm mindestens in großer Annäherung auffassen kann als einen Verzweigungsschnitt in einem mehrfachen Riemann'schen Raume, von dem ein Theil den physikalischen Raum darstellt. Eine in letzterem erregte Schwingung findet somit gleichsam in den beiden Seiten des Verzweigungsschnittes offene Thüren, durch welche sie den physikalischen Raum verlassen und in einen andern unendlichen Raum eintreten kann, in dem sie sich so auszubreiten vermag, daß kein Antheil in den physikalischen Raum zurückläuft. Diese Wirkung eines Verzweigungsschnittes ist mindestens ein starkes Analogon zu der absolut schwarzen Schirmen beigelegten Eigenschaft, Licht weder durchzulassen, noch zurückzuwerfen, und da man letztere, wie es scheint, durch gewöhnliche Grenzbedingungen in keiner Weise auszudrücken vermag, so wird man die Repräsentation absolut schwarzer Flächen durch Verzweigungsschnitte wenigstens als ein Annäherungsverfahren benutzen dürfen, das wahrscheinlich der Wirklichkeit ebenso angenähert entspricht, als die Hypothese der Möglichkeit unendlich dünner, absolut reflectirender Schirme, mit der Herr Sommerfeld in seiner schönen Arbeit operirt.

Indessen besitzt diese Methode doch gewisse Schwierigkeiten, die, — obwohl ich schon an einer anderen Stelle [1]) auf einige hierher gehörige Fragen eingegangen bin — bei der vielfachen Anwendung, die man in der Optik und Wärmelehre von absolut schwarzen Körpern macht, eine ausführlichere Besprechung wohl verdienen dürften.

Ein mehrfacher Riemann'scher Raum wird durch die Gestalt, Lage und Ordnung seiner Verzweigungscurven vollständig bestimmt, aber mit dem unendlich dünnen, absolut schwarzen Schirm, dessen Rand nach dem Obigen als Verzweigungscurve aufgefaßt werden soll, ist deren Ordnung noch nicht gegeben; dieselbe ist vielmehr willkürlich, und daraus folgt, daß auch der dem Problem zuzuordnende mehrfache Raum in einer Hinsicht willkürlich bleibt. Die hierdurch angezeigte Unbestimmtheit des Problems wird noch dadurch vergrößert, daß man offenbar, ohne mit den Festsetzungen desselben in Widerspruch zu kommen, in

1) W. Voigt, l. c.

dem nicht-physikalischen Theilen des Raumes abermals schwarze Körper und damit neue Verzweigungsschnitte als vorhanden annehmen kann. Dagegen ist natürlich die Anwesenheit von Licht-, d. h. Energiequellen und auch von reflectirenden Körpern in jenen Theilen durch die Definition der absolut schwarzen Körper ausgeschlossen.

Die hierdurch aufgedeckte Unbestimmtheit liegt aber anscheinend in der Natur der Sache. Ein absolut schwarzer Körper mag für gewisse Fragen durch die rein negativen Eigenschaften fehlender Zurückwerfung und fehlender Durchlässigkeit genügend definirt sein; optisch vollkommen bestimmt ist er dadurch sicher nicht, denn er kann dabei noch auf vielfältige Weise die Lichtbewegung in seiner Umgebung beeinflussen. Ein absolut schwarzer Körper kann z. B. den Energiestrom einer auffallenden Lichtbewegung auf sich hinziehen, ein anderer kann ihn von sich hinwegtreiben, wie dies durch para- und diamagnetische Körper gegenüber dem Strom der magnetischen Polarisation stattfindet; beides ist mit der gewöhnlichen Definition absoluter Schwärze wohl vereinbar.

Es giebt sonach absolut schwarze Schirme, die bei gleicher Gestalt verschiedene Natur haben, und es kann sich immer nur um die Lösung des Problemes für eine einzelne Art der Schwärze handeln, die wir durch ein bestimmtes Verhalten des mehrfachen Raumes außerhalb von dessen physikalischem Theil repräsentirt denken können. So habe ich insbesondere früher das Problem einer absolut schwarzen Halbebene in dem speciellen Fall behandelt, daß der ihm zugeordnete mehrfache Raum ein nur zweifacher war, und werde im Nachstehenden ebenso verfahren; ich gedenke aber an einer andern Stelle auf die Frage zurückzukommen, in wie weit die Lösungen geändert werden, wenn man eine andere Ordnung der Vielfältigkeit benutzt.

In dem Fall eines nur zweifachen Raumes führen die beiden Seiten des Verzweigungsschnittes, die oben kurz als zwei offene Thüren aus dem physikalischen Raum R bezeichnet waren, in denselben nicht-physikalischen Raum R'. Befindet sich in R eine Lichtquelle, so strömt durch beide Thüren andauernd, aber im allgemeinen in periodisch-wechselnder Weise Energie, und es ist ohne Weiteres einzusehen, daß eine der Lichtquelle und dem bestimmten Raum angepaßte Lösung keine Bedeutung für unser Beugungsproblem hat, wenn einer dieser Ströme im Mittel Energie in R hineintransportirt; in diesem Falle würde der schwarze Schirm eben Energie durchlassen, was im Widerspruch mit der Definition der

absoluten Schwärze stände. Strömt durch beide Thüren Energie aus R hinaus, so wird in R' eine Fläche vorhanden sein, welche die betreffenden beiden Ströme trennt, der sie also entlang fließen müssen. Die Energiebewegung verläuft also ebenso, als wäre jene Fläche eine feste Wand, welche den Raum R' in zwei unendliche Theile zerlegt, von denen je einer durch eine Thür mit R communicirt. Diese Ueberlegung zeigt, daß auch der einfache Fall eines nur zweifachen Raumes noch als für eine bestimmte Art von absoluter Schwärze characteristisch angesehen werden kann.

Ist der mehrfache Raum durch seine Verzweigungscurven characterisirt gedacht, so bleibt immer noch die Gestalt der durch sie umrandeten Verzweigungsschnitte, die als dünne schwarze Schirme gedeutet werden sollen, willkürlich, soweit nicht bei ihrer Wahl ein Widerspruch mit der Forderung entsteht, daß der Energiestrom immer aus dem physikalischen Raum R hinaus fließen muß. Alle Schnitte, welche dieser Bedingung genügen, sind aber für das Beugungsproblem untereinander gleichwerthig. Ja es bietet sich die Möglichkeit, statt eines einzigen zwei verschiedene Schnitte durch dieselbe Verzweigungscurve zu legen und den ganzen zwischen ihnen liegenden Theil von R als einen massiven schwarzen Körper zu betrachten. Die Lösung, die zunächst dem unendlich dünnen Schirm angepaßt war, muß dann auch die Beugung an jenem Körper darstellen. Es ist klar, daß diese Folgerung mit der allgemein gebräuchlichen Auffassung von der Natur eines absolut schwarzen Körpers sehr wohl harmonirt.

Bei dieser Erweiterung entsteht eine interessante neue Unbestimmtheit, die nicht übergangen werden darf. Außer der Ordnung der Verzweigungscurve ist jetzt offenbar auch deren Lage auf der Oberfläche des Körpers zunächst willkürlich, und einer jeden Lage entspricht ein physikalisch verschiedener absolut schwarzer Körper. Auch dieser Umstand erklärt sich in der oben dargelegten Weise.

2) Der Vorgang der Beugung ebener homogener Wellen an einer absolut schwarzen Halbebene, deren Begrenzungsgerade der Wellenebene parallel liegt, ist nur von zwei Coordinaten abhängig, und Gleiches gilt von der Beugung ebener inhomogener Wellen, wenn außerdem die Geraden constanter Amplitude mit dem Rand parallel sind. Der Vorgang läßt sich somit auf einer mehrblättrigen Riemann'schen Ebene, die wir nach dem Obigen speciell zweiblättrig wählen wollen, verfolgen; das eine Blatt entspricht dabei dem physikalischen Raum. Die ebene Wellenfläche stellt sich als eine gerade Wellenlinie dar, die in dem phy-

sikalischen Blatt aus der Unendlichkeit heranschreitet und den Verzweigungsschnitt trifft, der den absolut schwarzen Schirm repräsentirt. Der auf den Schirm fallende Theil der Welle tritt durch diesen hindurch aus dem Blatt aus und verschwindet somit aus dem physikalischen Raum. Der andere Theil breitet sich allein auf dem Blatte, in dem die Welle heranschritt, d. h. im physikalischen Raume aus und erleidet dabei die gemeinhin als „Beugung" bezeichneten Veränderungen.

Diese Auffassung der Beugung ist ebensowohl auf homogene, wie auf inhomogene ebene Wellen anwendbar. Ich werde zeigen, daß die Lösung des ersten Problemes, die wir Herrn Sommerfeld verdanken, sich so erweitern läßt, daß sie den letzteren Fall mit umschließt.

Die Gleichungen für die Componenten u, v, w des Neumann'schen oder ξ, η, ξ des Fresnel'schen Schwingungsvectors benutzen wir in der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \xi, \ \ldots, \ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

worin a eine dem Medium und der Farbe des benutzten einfarbigen Lichtes individuelle Constante, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener homogener Wellen darstellt. Hängt der Vorgang, wie hier angenommen, von der Z-Coordinate nicht ab, so wird daraus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \ \ldots, \ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right), \ \ldots, \ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0;$$

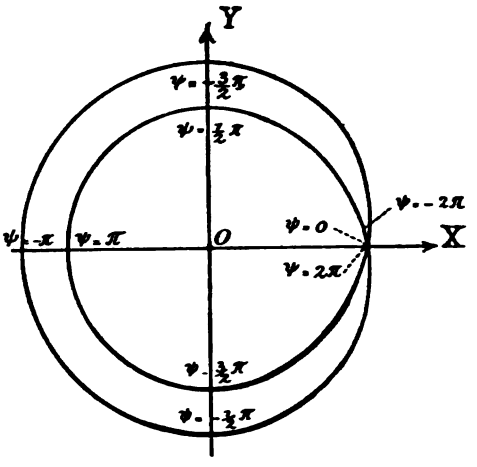
für die Componenten w und ζ bleibt sonach nur die eine Gleichung

1) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y^2} \right), \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

übrig, und da diese beiden Componenten unter Berücksichtigung der beiden Bedingungen

2) $$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

zur Darstellung des ganzen Vorganges ausreichen, so genügt es, die Betrachtung nur an sie anzuknüpfen.



Sei nun gegeben eine die XY-Ebene überdeckende zweiblättrige Riemann'sche Fläche, (Fig. 1), die im Coordinatenanfang einen einfachen Windungspunkt besitzt. Die positive X-Axe bilde den Verzweigungsschnitt, der die beiden Blätter trennt, letztere mögen also bei Einführung von Polarcoordinaten r, ψ durch die Werthbereiche $-2\pi < \psi < 0$ (negatives Blatt) und $0 < \psi < +2\pi$ (positives Blatt) gegeben sein. Setzt man dann abgekürzt

$$\frac{2\pi r}{\lambda} \cos\psi = \gamma, \qquad \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sigma,$$

so hat Herr Sommerfeld gezeigt, daß die complexe Function[1])

$$3) \qquad \mathfrak{F} = K\sqrt{\frac{i}{\pi}}\, e^{i(2\pi t/\tau - \gamma)} \int_{-\infty}^{\sigma} e^{-i\xi^2} d\xi,$$

in der K, τ, a und $\lambda = \tau a$ reelle Constanten bezeichnen, auf dieser Fläche einwerthig und stetig ist und der Gleichung

$$4) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} \right)$$

genügt, daß für $r = \infty$ und $0 < \psi < 2\pi$

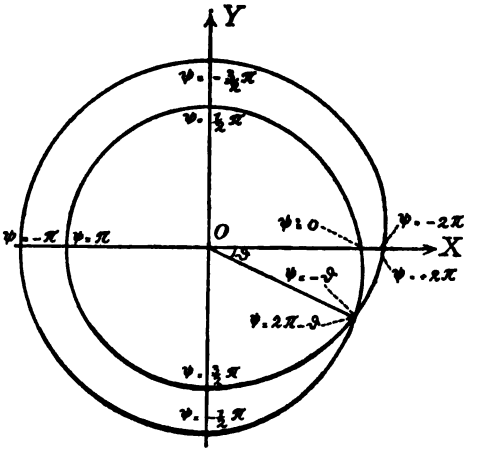
$$\mathfrak{F} = Ke^{2\pi i \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r\cos\psi}{\lambda} \right)},$$

für $r = \infty$ und $-2\pi < \psi < 0$ aber $\mathfrak{F} = 0$ ist. Der reelle und der imaginäre Theil von $\mathfrak{F}$ für w oder ζ genommen stellen also auf den unendlich fernen Theilen des positiven Blattes geradlinige homogene Wellen dar, die normal zur X-Axe liegen und ihr parallel fortschreiten.

Dreht man jetzt den Verzweigungsschnitt aus der Position in Figur 1) in die in Figur 2), wo er den Winkel $-\vartheta$ mit der

1) ξ, η, ζ haben weiterhin andere Bedeutung als S. 5.

$+X$-Axe einschließt, und faßt nunmehr das durch $-\vartheta < \psi < 2\pi - \vartheta$ definirte Blatt als Bild des physikalischen Raumes auf, so bestimmt die Function $\mathfrak{F}$ die Beugung einer parallel $+X$ fortschreitenden ebenen homogenen Welle an einem um $-\vartheta$ gegen die X-Axe geneigten ebenen absolut schwarzen Schirm, der durch die Z-Axe begrenzt ist.



3) Um von einfallenden homogenen zu inhomogenen Wellen überzugehen, wollen wir in der Lösung (3) die dabei angegebenen Werthe γ und σ mit den folgenden vertauschen

$$5) \qquad \gamma = \frac{2\pi r}{\lambda}\cos(\psi + i\alpha), \qquad \sigma = \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}}\sin\tfrac{1}{2}(\psi + i\alpha),$$

in denen α eine reelle Größe bezeichnet, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als stets positiv festgesetzt werden kann. Da bei Einführung von Polarcoordinaten die Gleichung (4) übergeht in

$$6) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \psi^2}\right),$$

so bleibt $\mathfrak{F}$ auch nach dieser Erweiterung eine Lösung der Gleichung (4), behält überdies sein reguläres Verhalten auf der zweiblättrigen Ebene bei.

Für die Anwendung notiren wir uns die folgenden Beziehungen, in denen Cos und Sin die hyperbolischen Functionen bezeichnen, und p, q, p', q' Abkürzungen sind.

$$7) \qquad \gamma = \frac{2\pi r}{\lambda}(\cos\psi \operatorname{Cos}\alpha - i\sin\psi \operatorname{Sin}\alpha) = \frac{2\pi r}{\lambda}(p\cos\psi - iq\sin\psi),$$

$$8) \qquad \begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}}(\sin\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\alpha + i\cos\tfrac{1}{2}\psi \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\alpha) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}}(p'\sin\tfrac{1}{2}\psi + iq'\cos\tfrac{1}{2}\psi), \end{aligned}$$

$$p>1,\ q>0,\ p'>1,\ q'>0,$$

9) $$p^2-q^2=1,\ p'^2-q'^2=1,\ 2p'^2=p+1,\ 2q'^2=p-1,$$

10) $$\sigma^2=\frac{2\pi r}{\lambda}-\gamma=\frac{2\pi r}{\lambda}(1-p\cos\psi+iq\sin\psi).$$

Wir fassen nun zunächst die Werthe von $\mathfrak{F}$ für $x=\pm\infty$, d. h. für $r=\infty$ und $\psi=0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi$ in's Auge, die sich sehr leicht bilden lassen.

Führt man nämlich die Abkürzung

11) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\sigma e^{-i\xi^2}d\xi=J(\sigma)$$

ein und setzt bei reellem β

12) $$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\beta\cos\xi^2 d\xi=C(\beta),\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\beta\sin\xi^2 d\xi=S(\beta),$$

so wird

13) $$J(\beta)=C(\beta)-iS(\beta),\qquad J(i\beta)=iC(\beta)-S(\beta).$$

Nun ist aber $C(\infty)=S(\infty)=\frac{1}{2}$, und es gilt demgemäß

14) $$\begin{aligned}J(\infty)&=-J(-\infty)=\tfrac{1}{2}(1-i);\\ J(i\infty)&=-J(-i\infty)=-\tfrac{1}{2}(1-i).\end{aligned}$$

Nach (3) ist ferner

15) $$\mathfrak{F}=K\sqrt{\frac{i}{2}}e^{i(2\pi t/\tau-\gamma)}(J(\infty)+J(\sigma)),$$

und nach (8)

für $\psi=\mp 2\pi$, $\sigma=-iq'\sqrt{4\pi r/\lambda}$, also bei $r=\infty$, $\sigma=-i\infty$,
$=-\pi$, $=-p'\sqrt{4\pi r/\lambda}$, $=-\infty$,
$=0$, $=+iq'\sqrt{4\pi r/\lambda}$, $=+i\infty$,
$=+\pi$, $=+p'\sqrt{4\pi r/\lambda}$, $=+\infty$.

Demnach ergiebt sich

für $r=\infty$ und $\psi=\mp 2\pi$, $J(\infty)+J(\sigma)=1-i$, $\mathfrak{F}=Ke^{i(2\pi t/\tau-\gamma)}$,
$=-\pi$, $=0$, $=0$,
$=0$, $=0$, $=0$,
$=+\pi$, $=1-i$, $=Ke^{i(2\pi t/\tau-\gamma)}$.

4) Zu einer allgemeinen Entwickelung des Werthes von $J(\infty)+J(\sigma)$ und somit von $\mathfrak{F}$ schreiben wir zunächst unter Be-

nutzung der Substitution $\xi^2 = \eta$

16) $$J(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sigma^2} e^{-i\eta} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}};$$

ferner ziehen wir den Werth

$$\sigma^2 = \frac{2\pi r}{\lambda} (1 - p\cos\psi + iq\sin\psi)$$

heran und setzen

17) $$\eta = \frac{2\pi\varrho}{\lambda} (1 - p\cos\psi + iq\sin\psi),$$

wobei wir nun die Integration in Bezug auf η nach ϱ genommen denken. Führen wir noch die Abkürzungen

$$\sigma^2 = r(P + iQ), \quad \eta = \varrho(P + iQ)$$

ein, so erhalten wir

18) $$J(\sigma) = \sqrt{P + iQ} \int_0^r e^{-i\varrho(P+iQ)} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho}},$$

wobei ist

19) $$P = \frac{2\pi}{\lambda} (1 - p\cos\psi), \quad Q = \frac{2\pi q}{\lambda} \sin\psi.$$

Wir bemerken jetzt, daß P und somit der reelle Theil von σ^2 auf einigen Theilen unserer Doppelfläche positiv, auf andern negativ ist, und daß diese Theile demnach bei der Entwickelung des Integrales (18) gesondert zu behandeln sind.

Führen wir einen Hülfswinkel $\bar{\psi}$ ein durch die Beziehung

$$\frac{1}{p} = \cos\bar{\psi}, \text{ wobei } 0 < \bar{\psi} < \tfrac{1}{2}\pi$$

gemacht werden kann, so folgt aus (19), daß

$$P > 0 \text{ ist für } \cos\bar{\psi} > \cos\psi,$$

d. h. für

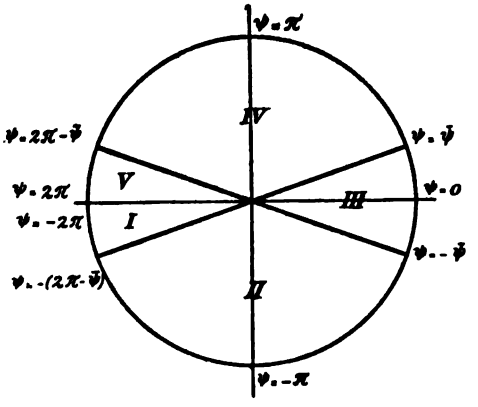
$$\bar{\psi} < \psi < (2\pi - \bar{\psi}) \text{ und für } -\bar{\psi} > \psi > -(2\pi - \bar{\psi});$$

daß aber

$$P < 0 \text{ ist für } \cos\bar{\psi} < \cos\psi,$$

d. h. für

$$-\bar{\psi} < \psi < +\bar{\psi} \text{ und für } \pm 2\pi \gtrless \psi \gtrless \pm(2\pi - \bar{\psi}).$$



Bildet man also die zweiblättrige Ebene auf eine einblättrige ab, wie nebenstehend verdeutlicht wird, so ist in den Bereichen I, III und V $P<0$, in II und IV $P>0$.

Q und somit der imaginäre Theil von σ^2 ist mit $\sin\psi$ proportional und wechselt daher gleichfalls beim Umlaufen des Coordinatenanfangspunktes sein Vorzeichen. Wo $Q>0$ ist, verliert $J(\sigma)$ bei unendlichem r seinen Sinn; man erkennt indessen leicht, daß der Factor $e^{-i\gamma}$, in welchen multiplicirt $J(\sigma)$ nach (15) in F auftritt und der auch gleich

$$e^{-i\left(\frac{2\pi r}{\lambda}-\sigma^2\right)}$$

d. h. gleich

$$e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} \cdot e^{+ir(P+iQ)}$$

ist, an jenen Stellen von solcher Ordnung unendlich klein wird, daß auch der Werth $e^{-i\gamma}J(\sigma)$ und somit F verschwindet. —

5) Wir nehmen nun zunächst die Bereiche I, III und V vor, für welche $P<0$ ist, und setzen für sie

$$20)\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pm i}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{+\eta\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}},$$

wobei wir das richtige Vorzeichen am besten dadurch bestimmen, daß die Resultate für $J(\infty)+J(\sigma)$ in den speciellen Richtungen $\psi = 0$ und $\psi = \pm 2\pi$ mit den oben direct erhaltenen übereinstimmen müssen

Es folgt nun zunächst:

$$J(\sigma) = \frac{\pm i}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\int_0^{\sigma^2} e^{+\eta(\zeta-i)}d\eta = \frac{\pm i}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}}\,\frac{e^{\sigma^2(\zeta-i)}-1}{\zeta-i}$$

$$= \frac{\pm i}{\pi\sqrt{2}}\left[e^{-i\sigma^2}\int_0^\infty\frac{e^{\sigma^2\zeta}(\zeta+i)\,d\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta}} - \int_0^\infty\frac{(\zeta+i)\,d\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta}}\right].$$

Wegen

$$21) \qquad \int_0^\infty \frac{(\xi+i)\,d\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i)$$

ergiebt dies

$$22) \qquad J(\sigma) = \pm\left[\frac{e^{-i\sigma^2}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{e^{\sigma^2\xi}(i\xi-1)d\xi}{(\xi^2+1)\sqrt{\xi}} + \frac{1-i}{2}\right],$$

und bei Einführung der Abkürzungen

$$23) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi}\,e^{-r|P|\xi}\cos r\,Q\xi\,d\xi}{\pi(\xi^2+1)\sqrt{2}} = G_c, \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi}\,e^{-r|P|\xi}\sin r\,Q\xi\,d\xi}{\pi(\xi^2+1)\sqrt{2}} = G_s, \\ \int_0^\infty \frac{e^{-r|P|\xi}\cos r\,Q\xi\,d\xi}{\pi(\xi^2+1)\sqrt{2\xi}} = H_c, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-r|P|\xi}\sin r\,Q\xi\,d\xi}{\pi(\xi^2+1)\sqrt{2\xi}} = H_s, \end{cases}$$

in denen $|P|$ den absoluten Werth von P bezeichnet, auch

$$24) \qquad J(\sigma) = \pm\left[\frac{1-i}{2} - e^{-i\sigma^2}((H_c+G_s)+i(H_s-G_c))\right].$$

Da $P<0$ ist, so verschwinden die G und H für unendliches r; damit dort für $\psi = 0$ und $\psi = \pm 2\pi$ die früheren Resultate herauskommen, ist in dem Bereich III das untere, in I und V das obere Vorzeichen zu wählen.

Hieraus folgt denn

für $-\bar{\psi} < \psi < +\bar{\psi}$ (Bereich III)

$$25) \qquad J(\infty)+J(\sigma) = e^{-i\sigma^2}((H_c+G_s)+i(H_s-G_c)),$$

für $\mp 2\pi \lessgtr \psi \lessgtr \mp(2\pi-\bar{\psi})$ (Bereiche I und V)

$$26) \qquad J(\infty)+J(\sigma) = (1-i)-e^{-i\sigma^2}((H_c+G_s)+i(H_s-G_c)). -$$

6) Für die Bereiche II und IV, wo $P>0$ ist, setzen wir

$$27) \qquad \frac{1}{\sqrt{\eta}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\eta\xi}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}$$

und verschieben die Wahl des Vorzeichens ebenso, wie oben. Es folgt zunächst

$$J(\sigma) = \frac{\pm 1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\int_0^{\sigma^2} e^{-\eta(\xi+i)}d\eta = \frac{\mp 1}{\pi\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}\frac{e^{-\sigma^2(\xi+i)}-1}{\xi+i}$$

$$= \frac{+1}{\pi\sqrt{2}}\left[e^{-i\sigma^2}\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma^2\zeta}(\zeta-i)\,d\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta}} - \int_0^\infty \frac{(\zeta-i)\,d\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta}}\right].$$

Nun ist aber

28) $$\int_0^\infty \frac{(\zeta-i)\,d\zeta}{(\zeta^2+1)\sqrt{\zeta}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1-i),$$

und es resultirt bei Einführung der Abkürzungen G und H aus (23):

29) $$J(\sigma) = \pm\left[\frac{1-i}{2} + e^{-i\sigma^2}((H_c - G_c) + i(H_c + G_c))\right].$$

Wiederum verschwinden für unendliches r die G und H; damit dort für $\psi = \pm\pi$ die früheren Werthe resultiren, ist in dem Bereich IV das obere, in II das untere Vorzeichen zu benutzen.

Hieraus folgt:

für $+\bar{\psi} < \psi < (2\pi - \bar{\psi})$ (Bereich IV)

30) $$J(\infty) + J(\sigma) = (1-i) + e^{-i\sigma^2}((H_c - G_c) + i(H_c + G_c)),$$

für $-\bar{\psi} > \psi > -(2\pi - \bar{\psi})$ (Bereich II)

31) $$J(\infty) + J(\sigma) = -e^{-i\sigma^2}((H_c - G_c) + i(H_c + G_c)).$$

Für das Folgende setzen wir abgekürzt

32) $$\begin{aligned}(H_c + G_c) + i(H_c - G_c) &= M_1,\\ -(H_c - G_c) - i(H_c + G_c) &= M_2,\end{aligned}$$

wobei der Index 1 auf die Bereiche I, III, V, der Index 2 auf die Bereiche II und IV hinweist, und erhalten so aus (25), (26), (30) und (31) für

33)
$$\begin{cases}
\text{I)} & -2\pi < \psi < -(2\pi - \bar{\psi}), & J(\infty) + J(\sigma) = (1-i) - e^{-i\sigma^2} M_1,\\
\text{II)} & -(2\pi - \bar{\psi}) < \psi < -\bar{\psi}, & = e^{-i\sigma^2} M_2,\\
\text{III)} & -\bar{\psi} < \psi < +\bar{\psi}, & = e^{-i\sigma^2} M_1,\\
\text{IV)} & +\bar{\psi} < \psi < +(2\pi - \bar{\psi}), & = (1-i) - e^{-i\sigma^2} M_2,\\
\text{V)} & +(2\pi - \bar{\psi}) < \psi < +2\pi, & = (1-i) - e^{-i\sigma^2} M_1.
\end{cases}$$

7) Zunächst wird nachzuweisen sein, daß wirklich, wie nach ihrer Bedeutung erforderlich ist, diese Ausdrücke sich in den Grenzen zwischen den einzelnen Bereichen stetig aneinanderschließen. In allen diesen Grenzlinien ist $\cos\varepsilon = \cos\varepsilon_1$ also $P = 0$ und hiernach

$$H_2 = \bar{H}_2, \quad H_3 = \bar{H}_3,$$
$$G_2 = \bar{G}_2, \quad G_3 = \bar{G}_3,$$

wobei die $\bar{G}$ und $\bar{H}$ neue Bezeichnungen sind.

Die Werthe dieser letzteren Größen lassen sich aber leicht aus dem Dirichlet'schen Integral [1])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}\,\alpha\vartheta}{(l^2+\vartheta^2)(k+\vartheta i)^a} = \frac{\pi}{l}\, e^{-lc}\, \frac{1}{(k+l)^a},$$

ableiten, in dem

$$(k+\vartheta i)^a = (k^2+\vartheta^2)^{\frac{1}{2}a} e^{a i \operatorname{arctg}(\vartheta/k)}$$

ist und a, c und k positiv sein müssen.

In der That, setzt man $l = 1$, $k = 0$, $a = \frac{1}{2}$ so erhält man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-c\vartheta i}\, d\vartheta\, e^{-\frac{1}{2}i \operatorname{arctg}(\vartheta/k)}}{(1+\vartheta^2)(\vartheta^2)^{\frac{1}{4}}} = \pi e^{-c}.$$

Zerlegt man das Integral in eines von $-\infty$ bis 0 und eines von 0 bis $+\infty$, so ist $\operatorname{arctg}(\vartheta/k)$ im ersten mit $-\frac{1}{2}\pi$, im zweiten mit $+\frac{1}{2}\pi$ zu vertauschen. Setzt man noch im ersten Integral $-\vartheta$ an Stelle von ϑ, so erhält man ohne Weiteres

$$34) \quad \int_0^\infty \frac{e^{i(c\vartheta+\frac{1}{4}\pi)} + e^{-i(c\vartheta+\frac{1}{4}\pi)}\, d\vartheta}{(\vartheta^2+1)\sqrt{\vartheta}} = 2\int_0^\infty \frac{\cos(c\vartheta+\frac{1}{4}\pi)\, d\vartheta}{(\vartheta^2+1)\sqrt{\vartheta}}$$
$$= \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{(\cos c\vartheta - \sin c\vartheta)\, d\vartheta}{(\vartheta^2+1)\sqrt{\vartheta}} = \pi e^{-c}.$$

Hieraus folgt auch durch Differentiation nach c

$$35) \quad \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{(\sin c\vartheta + \cos c\vartheta)\sqrt{\vartheta}\, d\vartheta}{\vartheta^2+1} = \pi e^{-c}.$$

Diese zwei Formeln ergeben bei der Vergleichung mit den Wer-

1) L. Dirichlet, Crelle's Journ. Bd. 4, S. 94, 1829.

then von $\overline{H}_e$, $\overline{H}_s$, $\overline{G}_e$, $\overline{G}_s$, die durch die Verfügung $P = 0$, $Q = \overline{Q}$ aus (23) folgen,

$$36) \qquad \overline{H}_e - |\overline{H}_s| = \overline{G}_e + |\overline{G}_s| = \tfrac{1}{2} e^{-r|\overline{Q}|},$$

wobei wieder $|F|$ den absoluten Werth von F bezeichnet. Eine gesonderte Bestimmung von $\overline{H}_e$, $\overline{H}_s$, $\overline{G}_e$, $\overline{G}_s$ scheint in geschlossener Form nicht möglich zu sein, was wegen später auftauchender Fragen sehr unbequem ist. Für den Nachweis, daß die Ausdrücke (33) über die Grenzen, wo $\cos\psi = \cos\overline{\psi}$, also $P = 0$ ist, sich stetig aneinander schließen, reicht indessen die Beziehung (36) für sich allein schon aus.

Zwei Beispiele mögen genügen. In der Grenze (I, II) ist $\psi = -(2\pi - \overline{\psi})$, also $\sin\psi = +\sin\overline{\psi}$, somit $\overline{Q} > 0$. Die nach (33) hier geltende Bedingung der Continuität

$$1 - i = e^{-i\overline{\sigma}^2}(\overline{M}_1 + \overline{M}_2)$$

wird hiernach zu

$$(1-i)e^{-r|\overline{Q}|} = (\overline{H}_e + |\overline{G}_s| - |\overline{H}_s| + \overline{G}_e) + i(|\overline{H}_s| - \overline{G}_e - \overline{H}_e - |\overline{G}_s|),$$

und dies ist nach (36) in der That identisch erfüllt.

In der Grenze (II, III) ist $\psi = -\overline{\psi}$, also $\sin\psi = -\sin\overline{\psi}$, $\overline{Q} < 0$. Die nach (33) hier geltende Continuitätsbedingung

$$\overline{M}_1 = \overline{M}_2$$

wird somit zu

$$\overline{H}_e - |\overline{G}_s| - i(|\overline{H}_s| + \overline{G}_e) = |\overline{H}_s| + \overline{G}_e - i(\overline{H}_e - |\overline{G}_s|)$$

und auch dies ist durch (36) erfüllt.

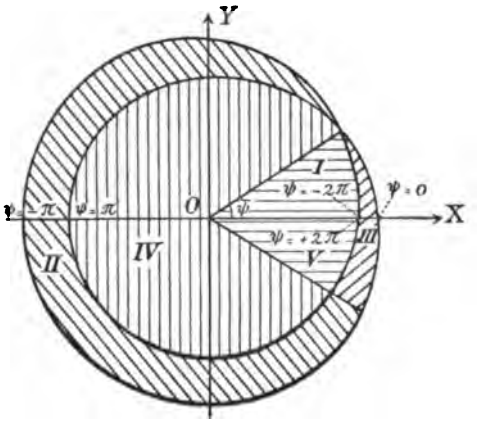
8) Für die Lösung $\mathfrak{F}$ erhalten wir nach (33) unter Benutzung der Abkürzung

$$37) \qquad K\sqrt{\frac{i}{2}}e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} = T$$

für die fünf Bereiche unserer zweiblättrigen Ebene, die in Fig. 4 durch verschiedene Schraffirung angedeutet sind[1]), das folgende definitive Werthsystem:

---

1) Die Gebiete I und V sind gleichmäßig schraffirt, da in ihnen die gleichen Formeln gelten.



38)
$$\begin{cases} \text{I)} & -2\pi < \psi < -(2\pi - \bar{\psi}), & \mathfrak{F} = T((1-i)e^{-i\gamma} - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} M_1) \\ \text{II)} & -(2\pi - \bar{\psi}) < \psi < -\bar{\psi}, & = T.e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} M_2, \\ \text{III)} & -\bar{\psi} < \psi < +\bar{\psi}, & = T.e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} M_1, \\ \text{IV)} & +\bar{\psi} < \psi < +(2\pi - \bar{\psi}), & = T((1-i)e^{-i\gamma} - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} M_2), \\ \text{V)} & +(2\pi - \bar{\psi}) < \psi < +2\pi, & = T((1-i)e^{-i\gamma} - e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}} M_1). \end{cases}$$

Da die Ausdrücke M mit wachsendem r zu Null convergiren, so lassen diese Formeln Folgendes erkennen. Legt man den Verzweigungsschnitt der Doppelebene, wie in Figur 4 gezeichnet, in die Richtung $\psi = \bar{\psi}$, so wird die Bewegung in hinreichend großer Entfernung vom Coordinatenanfang im unteren Blatte angenähert als eine vom 0 Punkte ausgehende Kreiswelle, im oberen aber als die Superposition einer solchen mit einer inhomogenen geradlinigen Welle, die normal zur X-Axe liegt und parallel zur X-Axe fortschreitet, angesehen werden können.

In der That stellt — wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ complexe Constanten sind — ein Ausdruck von der Form

39)
$$\mathfrak{F}_1 = \frac{1}{\sqrt{r}} \mathfrak{A} e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right)}$$

eine Welle der ersten Art, ein Ausdruck von der Form

$$40)\qquad \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{B}e^{\frac{2\pi i t}{\tau} - i\gamma} = \mathfrak{B}e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}(p\cos\psi - iq\sin\psi)\right)}$$

eine solche von der zweiten Art dar. Die Geschwindigkeit der ersteren ist gleich a, die der letzteren gleich a/p, somit stets kleiner, als a, da nach (9) $p > 1$ ist. $\lambda/2\pi q$ giebt die Länge der Wellengeraden, auf welcher die Amplitude der geradlinigen inhomogenen Welle auf den e-ten Theil herabsinkt; p und q stehen dabei nach (9) in dem durch die Ausgangsgleichung (4) geforderten Zusammenhang $p^2 - q^2 = 1$, woraus unter Rücksicht auf $1/p = \cos\bar{\psi}$ auch folgt

$$41)\qquad q = \operatorname{tg}\bar{\psi}.$$

Die complexe Amplitude $\mathfrak{B}$ der geradlinigen inhomogenen Welle findet sich in unserm Falle, wie eine einfache Rechnung zeigt, mit K identisch;

$$\mathfrak{F}_\infty = Ke^{i\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \gamma\right)}$$

ist somit das Gesetz der in unendlicher Entfernung vom Coordinatenanfang stattfindenden Schwingung.

Es möge darauf hingewiesen werden, daß bei verschwindender Inhomogenität der Winkel $\bar{\psi}$ gleichfalls verschwindet. Man erkennt leicht, wie sich hierbei der Uebergang zu dem Fall der Beugung homogener Wellen vollzieht. Die Bereiche I, III und V in Fig. 4 verschwinden, die Formeln (25) und (26) verlieren ihre Bedeutung, (30) und (31) hingegen nehmen die Form an:

für $0 < \psi < 2\pi$

$$42)\qquad J(\infty) + J(\sigma) = (1-i) - e^{-i\sigma^2}(G - iH),$$

für $0 > \psi > -2\pi$

$$J(\infty) + J(\sigma) = e^{-i\sigma^2}(G - iH),$$

wobei G und H die Werthe G_e und H_e für $q = 0$ und $p = 1$, d. h. für $Q = 0$ und $P = \frac{2\pi}{\lambda}(1 - \cos\psi)$ darstellen. Dies Resultat stimmt genau mit dem früher dargestellten [1]) überein.

9) Durch Vorstehendes darf als bewiesen angesehen werden, daß unsere Erweiterung der Sommerfeld'schen Lösung wirklich das Problem der Beugung ebener inhomogener Wellen an einem

1) W. Voigt, l. c. p. 771.

absolut schwarzen durch eine Gerade begrenzten ebenen Schirm löst.

Eine erschöpfende Discussion der endgültigen Formeln (38) bietet wegen der darin auftretenden Integrale (23), die von zwei Parametern rP und rQ abhängen, einige Schwierigkeit. Es mag genügen, auf einige merkwürdige Resultate aufmerksam zu machen, die sich ohne allzugroße Rechnung aus dem Bisherigen ergeben.

Unter den vier Richtungen, für die $\cos\psi = \cos\bar{\psi}$ ist, nimmt die durch $\psi = \bar{\psi}$ gegebene eine ausgezeichnete Stellung ein, indem sie, so wie in Fig. 4 als Verzweigungsschnitt gewählt, die Doppelfläche nach der Bedeutung der Formeln (38) in zwei Hälften von in sich einheitlichem Character zerlegt. Wollte man indessen gemäß dem S. 2 Gesagten diesen Verzweigungsschnitt als Darstellung eines absolut schwarzen ebenen Schirmes betrachten, der sich von der Z-Axe aus im ersten Quadranten unter dem Winkel $\bar{\psi}$ gegen die XZ-Ebene nach Unendlich erstreckt, so würde das vorstehend Entwickelte ergeben, daß in diesem Falle im ganzen physikalischen Raum, der hier durch das obere Blatt repräsentirt wird, neben den vom Schirmrande ausgehenden Cylinderwellen ebene Wellen fortschreiten. Der absolut schwarze Schirm würde also in diesem Falle keinen Schatten werfen.

Man möchte zunächst geneigt sein, dieses Resultat dadurch zu erklären, daß in dem Falle der Fortpflanzung einer nach dem Gesetz (40) inhomogenen Welle der Energiefluß nicht normal zu den Ebenen constanter Phase, sondern in dem Winkel $\bar{\psi}$ gegen diese Richtung, d. h. parallel der oben angenommenen Lage des absolut schwarzen Schirmes, stattfindet. Aber eine solche Vorstellung wird noch einfacher als durch die Rechnung durch den Schluß widerlegt, daß in diesem Falle der Energiefluß längs seiner Richtung abnehmende Dichte haben müßte, obgleich er in einem Medium ohne Absorption stattfindet, — was offenbar absurd wäre.

Die wahre Erklärung des anscheinenden Widerspruches besitzt ein gewisses principielles Interesse. Es zeigt sich nämlich, daß überhaupt bei dem vorliegenden Problem der Beugung inhomogener ebener Wellen der Verzweigungsschnitt nicht in jeder beliebigen Lage einen absolut schwarzen Schirm repräsentirt, weil für gewisse Lagen die mittlere Energieströmung im physikalischen Blatt nicht von beiden Seiten nach dem Schnitt hin fließt, sondern auf der einen Seite zum Theil von ihm hinweg. Ueber solche Fälle ist in § 1 im Allgemeinen gesprochen worden.

Hieraus ergiebt sich, daß die aufgestellte Lösung nur in ei-

ner gewissen Beschränkung benutzbar ist, und es erwächst die Frage nach den Grenzen, innerhalb deren sie die gewünschte Bedeutung besitzt. Zu ihrer Beantwortung ist die Untersuchung der normal zum Radiusvector verlaufenden Energieströmung in den beiden Blättern unserer Doppelfläche erforderlich.

10) Der Schwingungsvector V, der je nach Belieben w, ζ oder auch einen Differentialquotienten einer dieser Functionen nach der Zeit repräsentiren kann, ist nach dem Vorstehenden durch den reellen oder den imaginären Theil der complexen Function $\mathfrak{F}$ dargestellt, die durch die Gleichung (15) allgemein, und durch (38) in verschiedenen Formen für die verschiedenen Bereiche der zweiblättrigen Ebene bestimmt ist. Wir wählen den reellen Theil und bezeichnen ihn durch

43) $$V = \Re(\mathfrak{F}).$$

Die allgemeine Formel für die Dichte j der Energieströmung parallel zur X-Axe lautet [1])

44) $$j = a^2\left(\eta \frac{\partial w}{\partial t} - \zeta \frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

worin v, w, η, ζ und a dieselbe Bedeutung haben wie S. 5. Sind, wie hier, alle Vectorcomponenten von z unabhängig, so wird

$$\eta = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

wegen

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ergiebt letzteres

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

und wegen

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

auch

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Für den Fall, daß ζ verschwindet, ist sonach

45) $$j_w = -a^2 \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x},$$

1) Vergl. z. B. W. Voigt, Kompendium, Bd. II, S. 642.

für den Fall, daß w verschwindet,

$$j_\zeta = -a^2 \zeta \int \frac{\partial \zeta}{\partial x} dt.$$

oder, wenn man $\zeta' = a \int \zeta dt$ eingeführt, auch

46) $$j_\zeta = -a^2 \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \frac{\partial \zeta'}{\partial x}.$$

Die X-Axe ist hierbei eine beliebige zu den Vectorcomponenten w und ζ normale Richtung; bezeichnen wir sie allgemeiner durch s, so gilt auch

47) $$j_w = -a^2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial s}, \quad j_\zeta = -a^2 \frac{\partial \zeta'}{\partial t} \frac{\partial \zeta'}{\partial s}.$$

Setzen wir endlich für w und ζ' die zusammenfassende Bezeichnung V ein und wählen die Einheiten für j so, daß der rechtsstehende positive Factor a^2 weggelassen werden kann, so darf der uns hier interessirende Energiestrom Ψ parallel zu dem Bogenelement $r d\psi$ als gegeben angesehen werden durch die Formel

48) $$\Psi = -\frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial V}{r \partial \psi} = -\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) \cdot \Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{r \partial \psi}\right).$$

Nun enthält $\mathfrak{F}$ den Winkel ψ nur in der Function σ^2, denn es ist nach (10) auch

$$\gamma = \frac{2\pi r}{\lambda} - \sigma^2;$$

wegen

49) $$\sigma^2 = r(P + iQ) = \frac{2\pi r}{\lambda}(1 - p\cos\psi + iq\sin\psi)$$

wird daher

50) $$\frac{\partial \mathfrak{F}}{r \partial \psi} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \sigma^2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}(p\sin\psi + iq\cos\psi) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \sigma^2}(P' + iQ'),$$

wobei $$P' = \partial P / r \partial \psi \quad \text{und} \quad Q' = \partial Q / r \partial \psi$$

neue Bezeichnungen sind.

Aus (15) folgt dann bei Berücksichtigung von (16)

51) $$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{2\pi i}{\tau} \mathfrak{F}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \sigma^2} = i\mathfrak{F} + K\sqrt{\frac{i}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{2\pi i\left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda}\right)}.$$

Für die weitere Rechnung wollen wir benutzen, daß

$$\sqrt{\frac{i}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{\frac{1}{4}\pi i}$$

ist, und

$$52)\quad \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)+\tfrac{1}{4}\pi\right] = c,\quad \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{\tau}-\frac{r}{\lambda}\right)+\tfrac{1}{4}\pi\right] = s,$$

$$53)\ e^{+i\sigma^2} = e^{r(iP-Q)} = C+iS,\ M = M'+iM'',\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = m = m'-im''$$

setzen, wo nun C, S, M', M'', m', m'' reelle Größen bezeichnen.

Die Formeln werden am einfachsten für die Bereiche II und III, wo nach (38)

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, KM(c+is)$$

ist, also gilt

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau}\, KM(ic-s),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{r\,\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, K(iM+m)(c+is)(P'+iQ').$$

Der Einfachheit halber beschränken wir uns weiterhin auf specielle Fälle, wo die Formeln nicht allzu complicirt ausfallen, und wählen zunächst solche Richtungen, für welche $\sin\psi = 0$, also auch $P' = 0$ ist; hier ergiebt sich

$$\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{\tau}\, K(M's+M''c),$$

$$\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{r\,\partial \psi}\right) = +\frac{1}{\sqrt{2}}\, KQ'((m''-M')c-(m'-M'')s).$$

Bildet man aus diesen Ausdrücken gemäß Formel (48) den Werth von Ψ, so erhält man dafür eine periodische Function der Zeit. Maßgebend für uns ist nur deren Mittelwerth Ψ_m, den man findet, wenn man die Factoren von c^2 und s^2 in Ψ addirt und mit $\frac{1}{2}$ multiplicirt. So gewinnt man sogleich für die durch $\sin\psi = 0$ gegebenen Richtungen in den Bereichen II und III

$$54)\qquad \Psi_m = -\frac{\pi}{2\tau}\, K^2Q'(m'M'-m''M'').$$

Etwas complicirter gestaltet sich die Rechnung für die Bereiche I, IV, V, wo nach (38)

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{\sqrt{2}} K((1-i)(C+iS)-M)(c+is)$$

ist. Hier wird sonach

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} K((C+S)+i(S-C)-M)(ic-s),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{r\,\partial \psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} K(i(C+S)-(S-C)-iM+m)(c+is)(P'+iQ').$$

Für die Richtungen, wo $\sin\psi = 0$, also $P' = 0$ ist, findet man

$$\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right) = -\frac{\pi\sqrt{2}}{\tau} K((C+S-M')s-(C-S+M'')c),$$

$$\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{r\,\partial \psi}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} KQ'((C+S-M'-m'')c+(C-S+M''+m')s).$$

Somit ergiebt sich als für die Bereiche I, IV, V bei $\sin\psi = 0$ gültig

55) $$\Psi_- = -\frac{\pi}{2\tau} K^2 Q'(m'(C+S-M')+m''(C-S+M'')).$$

Die Formeln für die Fälle, daß $\cos\psi = 0$ ist, also Q' verschwindet, sind etwas complicirter. Die wie oben geleitete Rechnung ergiebt für die Gebiete II und III

56) $$\Psi_- = \frac{\pi}{2\tau} K^2 P'(M'(m''-M')+M''(m'-M'')),$$

dagegen für die Gebiete I, IV, V

57) $$\Psi_- = -\frac{\pi}{2\tau} K^2 P'((C+S-M')(C+S-M'-m'') + (C-S+M'')(C-S+M''+m')).$$

Das allgemeine Resultat ist die Summe von (54), (56) resp. (55) (57). —

11) Was die in den vorstehenden Formeln auftretenden Functionen angeht, so ist ganz allgemein nach (53)

58) $$C = e^{-rQ}\cos rP,\quad S = e^{-rQ}\sin rP,$$

woraus für $\sin\psi = 0$ und somit $Q = 0$

59) $$C = \cos rP,\quad S = \sin rP,$$

für $\cos\psi = 0$ und somit $P = \frac{2\pi}{\lambda}$

60) $$C = e^{-rQ}\cos\frac{2\pi r}{\lambda},\quad S = e^{-rQ}\sin\frac{2\pi r}{\lambda}$$

folgt.

Aus der allgemeinen Definition (53) von m, nämlich

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = m = m' - im'',\ \text{wobei}\ \sigma^2 = r(P+iQ)$$

ist, folgt weiter, falls man

61) $$\left\{\begin{array}{ll} & P+iQ = Re^{2i\chi} \\ \text{also} & \\ & \frac{P}{R} = \cos 2\chi,\quad \frac{Q}{R} = \sin 2\chi \end{array}\right.$$

setzt und R als absolute Größe behandelt,

62) $$\left\{\begin{array}{ll} & \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r R}}e^{-i\chi}, \\ \text{somit} & \\ & m' = \frac{\cos\chi}{\sqrt{2\pi r R}},\quad m'' = \frac{\sin\chi}{\sqrt{2\pi r R}}. \end{array}\right.$$

Nun ist

$$R^2 = P^2 + Q^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\frac{(\cos\bar\psi - \cos\psi)^2 + \sin^2\bar\psi\sin^2\psi}{\cos^2\bar\psi},$$

also

63) $$R = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1-\cos\bar\psi\cos\psi}{\cos\bar\psi},$$

64) $$\cos 2\chi = \frac{\cos\bar\psi - \cos\psi}{1-\cos\bar\psi\cos\psi},\quad \sin 2\chi = \frac{\sin\bar\psi\sin\psi}{1-\cos\bar\psi\cos\psi}.$$

Berücksichtigt man noch, daß nach (8) für $\psi = \pm\pi$ der reelle Theil von σ resp. $\gtrless 0$ wird, so erhält man die folgende Tabelle:

	ψ	$\cos 2\chi$	$\sin 2\chi$	2χ	$m'\sqrt{-}$	$m''\sqrt{-}$	R	P	$\frac{Q'\lambda}{2\pi \operatorname{tg}\psi}$
I	-2π	-1	0	3π	0	-1	R_1	$-R_1$	$+1$
	$-(2\pi-\bar{\psi})$	0	$+1$	$\frac{5}{2}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	R_2	0	$\cos\bar{\psi}$
II	$-\pi$	$+1$	0	2π	-1	0	R_3	R_3	-1
	$-\bar{\psi}$	0	-1	$\frac{3}{2}\pi$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	R_2	0	$\cos\psi$
III	0	-1	0	π	0	$+1$	R_1	$-R_1$	$+1$
	$+\bar{\psi}$	0	$+1$	$\frac{1}{2}\pi$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	R_2	0	$\cos\psi$
IV	$+\pi$	$+1$	0	0	$+1$	0	R_3	R_3	-1
	$+(2\pi-\bar{\psi}$	0	-1	$-\frac{1}{2}\pi$	$+\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	R_2	0	$\cos\psi$
V	$+2\pi$	-1	0	$-\pi$	0	-1	R_1	$-R_1$	$+1$.

Dabei ist abgekürzt gesetzt $\sqrt{2\pi r R} = \sqrt{-}$,

65) $$\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1-\cos\bar{\psi}}{\cos\bar{\psi}} = R_1,\quad \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1-\cos^2\bar{\psi}}{\cos\psi} = R_2,\quad \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{1+\cos\psi}{\cos\psi} = R_3.$$

Endlich gilt allgemein nach (32) für die Bereiche I, III, V

66) $$M' = H_r + G_r,\quad M'' = H_r - G_r,$$

dagegen für die Bereiche II und IV

67) $$M' = -(H_r - G_r),\quad M'' = -(H_r + G_r).$$

In dem Falle, daß $\sin\psi$ verschwindet, werden G_r und H_r gleich Null,

68) $$G_r = G(rP) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\zeta}\, e^{-rP\zeta}}{\pi(\zeta^2+1)\sqrt{2}}\, d\zeta,\quad H_r = H(rP) = \int_0^\infty \frac{e^{-rP\zeta}}{\pi(\zeta^2+1)\sqrt{2\zeta}}\, ds.$$

12) Unter Benutzung dieser Werthe folgen nun aus (54) und (55) die folgenden Ausdrücke für die fünf Bereiche:

69)
$$\text{I)}\ \psi = -2\pi,\quad \Psi_r = +\frac{\pi^2 K^2 \operatorname{tg}\bar{\psi}}{\pi\lambda\sqrt{2\pi r R_1}}\left((\cos rR_1 + \sin rR_1) - G(rR_1)\right),$$

$$\text{II)}\ \psi = -\pi,\quad \Psi_r = -\frac{\pi^2 K^2 \operatorname{tg}\bar{\psi}}{\pi\lambda\sqrt{2\pi r R_2}}\, G(rR_2),$$

$$\text{III)}\ \psi = 0,\quad \Psi_m = -\frac{\pi^2 K^2 \operatorname{tg}\bar{\psi}}{\tau\lambda\sqrt{2\pi r R_1}}\, G(rR_1),$$

69)
$$\text{IV)}\ \psi = \pi,\quad \Psi_m = +\frac{\pi^2 K^2 \operatorname{tg}\bar{\psi}}{\tau\lambda\sqrt{2\pi r R_2}}\,(\cos rR_2 + \sin rR_2 - G(rR_2)),$$

$$\text{V)}\ \psi = 2\pi,\quad \Psi_m = +\frac{\pi^2 K^2 \operatorname{tg}\bar{\psi}}{\tau\lambda\sqrt{2\pi r R_1}}\,(\cos rR_1 + \sin rR_1 - G(rR_1)).$$

Der Uebergang zu dem Fall homogener Wellen geschieht wie S. 16 durch Einführung des Werthes $\bar{\psi} = 0$. Hierdurch wird

$$R_1 = 0,\quad R_2 = 4\pi/\lambda,$$
$$\operatorname{tg}\bar{\psi}/\sqrt{R_1} = \sqrt{\lambda/\pi}$$

und demgemäß wegen $G(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{I)}\ \psi = -2\pi,\quad \Psi_m = +\frac{\pi K^2}{2\tau\sqrt{2\lambda r}},$$

$$\text{II)}\ \psi = -\pi,\quad \Psi_m = 0,$$

70)
$$\text{III)}\ \psi = 0,\quad \Psi_m = -\frac{\pi K^2}{2\tau\sqrt{2\lambda r}},$$

$$\text{IV)}\ \psi = \pi,\quad \Psi_m = 0,$$

$$\text{V)}\ \psi = 2\pi,\quad \Psi_m = +\frac{\pi K^2}{2\tau\sqrt{2\lambda r}}.$$

Hier findet also an den beiden zu der $-X$-Axe parallelen Radienvectoren die Energieströmung rein radial statt; die Richtung $\psi = -\pi$ stellt dabei jene Grenze der beiden im nicht physikalischen Blatt stattfindenden Energieströmungen dar, von der auf S. 4 gesprochen ist. An den beiden zu der $+X$-Axe parallelen Radienvectoren ist eine zu ihnen normale Strömungs-Componente vorhanden und zwar ist sie für $\psi = \pm 2\pi$ positiv, für $\psi = 0$ negativ, — in beiden Vectoren aber von derselben absoluten Größe. Dies entspricht in der That genau der Symmetrie des Vorganges.

Vergleicht man mit den speciellen Werthen (70) die allgemeinen (69), am besten für einen kleinen Werth des Winkels $\bar{\psi}$, und bedenkt man, daß G für wachsendes Argument abnimmt, ohne sein Vorzeichen zu wechseln, so erkennt man, daß in den Fällen $\psi = -\pi$ und $\psi = 0$ ein Energiestrom Ψ_m von constanter

negativer Richtung stattfindet, und zwar für $\psi = -\pi$ von geringerer, für $\psi = 0$ von bedeutenderer Stärke, daß aber in den andern Fällen die Richtung des Energiestromes Ψ_m längs des Radiusvectors beiläufig periodisch mit dem Abstand vom Coordinatenanfang wechselt. Da R_2 an Größe R_1 beträchtlich übersteigt, so liegen diese Zeichenwechsel für $\psi = \pi$ einander viel näher, als für $\psi = \pm 2\pi$; außerdem wird das erreichte Maximum der Stromstärke im ersten Falle geringer sein, als im zweiten.

Dieser längs gewisser Radienvectoren stattfindende Zeichenwechsel von Ψ_m ist äußerst merkwürdig. Für die hier angeregte Frage ergiebt sich jedenfalls als unzweifelhaft, daß ein Verzweigungsschnitt, der mit einem solchen Vector zusammenfällt, als ein absolut schwarzer Schirm nicht gedeutet werden darf, und wir werden daraus auch schließen müssen, daß Gleiches von den ihnen benachbarten Richtungen, insbesondere also auch von den Richtungen in der Umgebung von $\psi = \pm 2\pi$ gilt.

13) Daß hiermit aber nicht jede Möglichkeit einer Verwendung der aufgestellten Lösung ausgeschlossen ist, ergiebt sich leicht, wenn wir einen der durch die Formeln (56) und (57) umfaßten speciellen Fälle genauer betrachten.

Wir wollen den Ausdruck (57) auf die im Bereich IV liegende Richtung $\psi = \frac{5}{4}\pi$ anwenden. Hier ist

$$\sin\psi = -1, \quad \cos\psi = 0, \quad P = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad Q = -\frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{tg}\bar{\psi},$$

$$P' = -\frac{2\pi}{\lambda\cos\bar{\psi}}, \quad Q' = 0, \quad m' > 0, \quad m'' \gtrless 0, \quad m' > |m''|$$

und man erhält leicht

$$\Psi_m = +\frac{\pi^2 K^2}{\lambda\tau\cos\bar{\psi}}\left\{\left[e^{+r|Q|}\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right) - M'\right]\left[e^{+r|Q|}\sqrt{2}\sin\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right) - M' + |m''|\right]\right.$$

71)

$$\left. + \left[e^{+r|Q|}\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right) + M''\right]\left[e^{+r|Q|}\sqrt{2}\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right) + M'' + m'\right]\right\}.$$

Für kleine r überwiegen die mit $1/\sqrt{r}$ proportionalen Glieder m' und m'' die additiv mit ihnen verbundenen; zugleich sind die in sie multiplicirten Klammern ersichtlich positiv. Hier ist also auch $\Psi_m > 0$.

Für etwas größere r bestimmen die Exponentialgrößen das Vorzeichen; dort wird sehr nahezu

$$\Psi_m = \frac{2\pi^2 K^3 e^{+2r|Q|}}{\lambda\tau\cos\bar{\psi}},$$

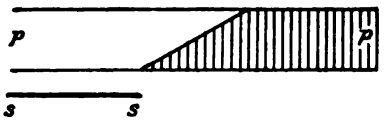
dort ist also Ψ_m auch positiv.

Durch diese Ueberlegung ist für den ganzen Radiusvector $\psi = \frac{3}{2}\pi$ mit Ausschluß einer kleinen Strecke, wo unsere Schlußweise versagt, das positive Vorzeichen von Ψ_m, also die positive Richtung des zum Vector normalen Energiestromes streng nachgewiesen. Für den Rest genüge hier die ergänzende qualitative Ueberlegung, daß auf den betrachteten Vector die intensivere Hälfte der aus Unendlich kommenden ebenen inhomogenen Welle auffällt, und daß das positive Vorzeichen von Ψ_m ein Ueberwiegen der in dieser stattfindenden Energieströmung über die betreffende Componente der Energiebewegung in der vom Schirmrande ausgehenden Kreiswelle (s. S. 15) bedeutet. Ist das positive Zeichen für kleinere und für größere r nachgewiesen, so ist kein Grund ersichtlich, warum für mittlere ein entgegengesetztes stattfinden sollte.

Mit der soeben betrachten Richtung $\psi = \frac{3}{2}\pi$ ist im untern Blatt die Richtung $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ parallel. Letztere liegt zwischen den beiden Vectoren $\psi = 0$ und $\psi = -\pi$, für welche durch die bezüglichen Formeln des Systems (69) ein überall negativer Werth der Energieströmung Ψ_m streng erwiesen ist. Da in dem durch sie begrenzten Bereich keinerlei Veranlassung zur Umkehrung der Stromrichtung gegeben ist, so darf es als feststehend angesehen werden, daß auch in dem durch $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ gegebenen Radiusvector Ψ_m allenthalben negativ ist. Ein strenger Nachweis dieser Thatsache durch die Rechnung, der an die Formel (56) anzuknüpfen hätte, würde sehr umständlich sein und mag deshalb unterbleiben.

Aus Vorstehendem ist zu schließen, daß jedenfalls Verzweigungsschnitte in der Nähe der Richtung $\psi = \frac{3}{2}\pi$ im obern Blatt, die mit der Richtung $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ im untern Blatt parallel ist, als absolut schwarze Schirme aufgefaßt werden dürfen. Diese Fälle entsprechen aber gerade den in der Praxis wohl allein in Betracht kommenden Problemen. Denn, wie wir auch immer ebene inhomogene Wellen hervorbringen mögen, ob durch sogenannte Totalreflexion im zweiten Medium, oder aber durch Brechung in einem absorbirenden Prisma: immer sind sie naturgemäß nach der Seite der unendlich wachsenden Amplituden begrenzt, während sie sich nach der Seite der unendlich abnehmenden beliebig weit, — jedenfalls soweit, daß eine Begrenzung wegen der Kleinheit der Intensität dort ignorirt werden kann — ausdehnen lassen.

Fig. 5



Figur 5 giebt eine Anordnung wieder, welche die Beugung einer mit ihrer intensiveren Hälfte auf einen schwarzen Schirm auffallenden Welle zu beobachten gestattet. pp stellt eine planparallele Platte dar, die aus einem durchsichtigen und einem stark absorbirenden Prisma von angenähert derselben Glassorte zusammengesetzt ist, ss den schwarzen Schirm. Fällt von oben her ungefähr normal eine ebene Welle ein, so ist damit sehr nahezu der Fall realisirt, der oben besprochen wurde.

Es mag hier betont werden, daß zur Erzielung eines merklichen Winkels $\bar{\psi}$ ein sehr bedeutender Grad von Inhomogenität erforderlich ist. Nach S. 16 giebt $\lambda/2\pi q$ die Strecke l, längs welcher in der einfallenden Welle die Amplitude auf den e-ten Theil abfällt. Nun ist $q = \operatorname{tg}\bar{\psi}$, also $\operatorname{tg}\psi = \lambda/2\pi l$; $\bar{\psi} = 5°$ verlangt für l einen Werth von etwa 0,001 mm, somit ein überaus stark absorbirendes Prisma.

Die Wellen, die bei der sogenannten totalen Reflexion im zweiten Medium entstehen, haben Amplituden, welche mit

$$e^{-\frac{2\pi y}{\lambda}\sqrt{n^2\alpha^2-1}}$$

proportional sind, wobei y die Entfernung von der total reflectirenden Fläche, λ die Wellenlänge im zweiten Medium, α den Sinus des Einfallswinkels und n das Brechungsverhältniß des ersten gegen das zweite Medium bezeichnet. Hier ist also

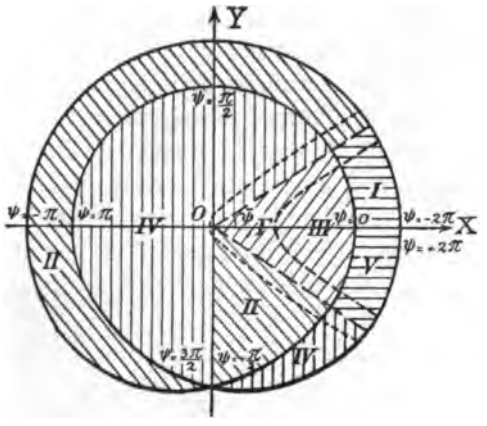
$$q = \sqrt{n^2\alpha^2-1} = \operatorname{tg}\bar{\psi};$$

beim Grenzwinkel der totalen Reflexion wird q gleich Null, und erreicht seinen größten Werth $\sqrt{n^2-1}$ bei streifendem Einfall. Letzterer ist bei Reflexion in Glas an Luft etwa $\sqrt{5/4}$, was einem Winkel $\bar{\psi}$ größer als 45° entspricht.

Uebrigens mag bemerkt werden, dass eine merkliche Wirkung der Inhomogenität der einfallenden Welle auf die Beugungserscheinung schon bei sehr kleinem $\bar{\psi}$ eintritt.

14) Nachdem wir ein Bereich festgestellt haben, innerhalb dessen unsere Lösung eine physikalische Bedeutung besitzt, gehen wir nunmehr zu der Untersuchung des Gesetzes der Intensität über. Dabei wollen wir gemäß dem soeben Entwickelten den Verzweigungsschnitt in die Nähe des Vectors $\psi = +\frac{1}{2}\pi$, resp. $\psi = -\frac{1}{2}\pi$, gelegt denken und das dann entstehende obere Blatt, das

Fig. 6.



als Abbild des physikalischen Raumes als physikalisches Blatt bezeichnet werden kann, ausschließlich betrachten. In Fig. 6 ist die so entstehende Vertheilung der Gebiete auf die beiden Blätter für den Fall gezeichnet, daß der Verzweigungsschnitt mit dem Vector $\psi = \frac{3}{2}\pi$ resp. $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ zusammenfällt.

Nach (37) und (38) ist für die Bereiche II und III die complexe Amplitude von $\mathfrak{F}$

$$72) \qquad \mathfrak{A} = \sqrt{\frac{i}{2}} K M e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}},$$

für die Bereiche I, IV, V hingegen

$$73) \qquad \mathfrak{A} = \sqrt{\frac{i}{2}} K ((1-i) e^{+i\sigma^2} - M) e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda}}.$$

Bezeichnen M' und σ' die zu M und σ conjugirten Functionen, so ergiebt sich für das Quadrat der reellen Amplitude A in den Bereichen II und III

$$74) \qquad A^2 = \tfrac{1}{2} K^2 M M' = \tfrac{1}{2} K^2 (M'^2 + M''^2),$$

in I, IV, V dagegen

$$A^2 = \tfrac{1}{2} K^2 ((1-i) e^{+i\sigma^2} - M)((1+i) e^{-i\sigma'^2} - M')$$

$$75) \quad = \tfrac{1}{2} K^2 (2 e^{i(\sigma^2 - \sigma'^2)} - M(1+i) e^{-i\sigma'^2} - M'(1-i) e^{+i\sigma^2} + M M')$$

$$= K^2 (e^{-2rQ} - e^{-rQ}\sqrt{2}\,[M' \sin(rP + \tfrac{1}{4}\pi) - M'' \cos(rP + \tfrac{1}{4}\pi)] + \tfrac{1}{2}(M'^2 + M''^2)).$$

Die Discussion dieser Formeln wird durch die Unmöglichkeit, den Verlauf der in M' und M'' enthaltenen Integrale G und H genauer zu übersehen, erschwert. Eine Ausnahme bildet der Fall, daß der Factor $r|P|$ von ξ in der Exponentialgröße einen sehr großen Werth besitzt, weil dann nur äußerst kleine ξ überhaupt einen merklichen Beitrag zu den Integralwerthen liefern, und

demgemäß der Nenner ζ^2+1 angenähert mit Eins vertauscht werden darf.

Bezeichnet man den für eine bestimmte Genauigkeit geforderten Minimal-Werth von $r|P|$ durch Π und bemerkt, daß

$$76) \qquad r|P| = \frac{2\pi r}{\lambda}\left|\frac{\cos\bar{\psi}-\cos\psi}{\cos\bar{\psi}}\right|$$

ist, so ergiebt sich für das durch die folgenden Entwickelungen nicht umfaßte Gebiet Γ der zweiblättrigen Ebene die Ungleichung

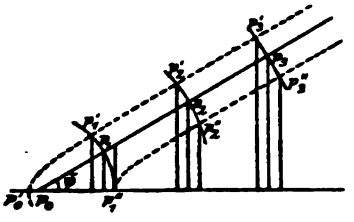
$$77) \qquad \frac{2\pi r}{\lambda}\left|\frac{\cos\bar{\psi}-\cos\psi}{\cos\bar{\psi}}\right| < \Pi.$$

Die Gleichungen der beiden Grenzcurven von Γ lauten, falls man $\Pi\lambda\cos\bar{\psi}/2\pi$ in Δ abkürzt,

$$78) \qquad r(\cos\bar{\psi}-\cos\psi) = \pm\Delta;$$

sie stellen also zwei Hyperbelzweige mit parallelen Asymptoten dar, die so liegen, wie in Fig 6 durch die punktirten Linien angedeutet ist. Den sehr anschaulichen Inhalt der Gleichung (78) vergegenwärtigt Fig. 7. Die Projectionen der kleinen Bögen

Fig. 7



$$\overline{p_1p_1'},\ \overline{p_2p_2'},\ \ldots\ \overline{p_1p_1''},\ \overline{p_2p_2''},\ \ldots$$

wie auch der Vector $\overline{p_0p_0'}$ müssen sämmtlich gleich Δ sein.

Zur Beurtheilung der Größenordnung der in Betracht kommenden Werthe von Π und Δ ist zu benutzen, daß bei kleinem $\psi-\bar{\psi}=\vartheta$

$$79) \qquad \Pi = \frac{2\pi r\vartheta}{\lambda}\operatorname{tg}\bar{\psi}$$

ist, und daß man zumeist in Entfernungen r vom Schirmrande beobachtet, welche 1 dm übersteigen. Nimmt man r nur gleich 100 mm und setzt $\lambda = (5/10000)$mm, so wird rund

$$\Pi = 1200000\cdot\vartheta\cdot\operatorname{tg}\bar{\psi},$$

und man erkennt, daß bei mäßigen Werthen $\bar{\psi}$ recht kleinen ϑ, also recht kleinen Breiten von Γ, doch sehr bedeutende Π ent-

sprechen. Nimmt man z. B. $\bar{\psi} = 10°$, $\vartheta = \frac{1}{2}°$ wo also nur etwa 1/20 des Gebietes III von der Betrachtung ausgeschlossen bliebe, so wird Π rund 2000.

Der Grad der Annäherung, die man bei einem vorgeschriebenen Π durch Fortlassen von ζ^2 neben Eins in den Nennern der Integrale (23) erhält, ist schwer zu schätzen, weil die integrirten Functionen periodisch ihr Vorzeichen wechseln. Die relative Genauigkeit ist größer bei den selbst größeren Integralen H_c und H_s, geringer bei den selbst kleineren G_c und G_s, was, wie sich zeigen wird, keine Nachtheile hat, da in den Ausdrücken für A^2 wegen der Bedeutung von M' und M'' immer ein H und ein G additiv verbunden auftreten. Ich habe mich durch einen Ueberschlag, bei dem das Integral in eine Summe von durch Annäherung zu berechnende Glieder zerlegt wurde, davon überzeugt, daß man mit Zahlen von der beispielsweise angegebenen Ordnung eine Annäherung erhält, die für eine qualitative Discussion der Resultate der Theorie ausreicht.

Durch Vernachlässigung von ζ^2 neben Eins gehen nun die durch (23) definirten Integrale H_c, H_s, G_c, G_s in die folgenden mit den entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichneten über:

80)
$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\zeta}}\, e^{-r|P|\zeta}\cos rQ\zeta\, d\zeta = h_c,\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\zeta}}\, e^{-r|P|\zeta}\sin rQ\zeta\, d\zeta = h_s,\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\zeta}{2}}\, e^{-r|P|\zeta}\cos rQ\zeta\, d\zeta = g_c,\\
&\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\zeta}{2}}\, e^{-r|P|\zeta}\sin rQ\zeta\, d\zeta = g_s,
\end{aligned}\right.$$

deren Werthe sich wegen $\sigma^2 = r(P + iQ)$ direct aus dem Integral

81)
$$\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\zeta}}\, e^{-\sigma^2\zeta}\, d\zeta = h_c - ih_s$$

und dem daraus folgenden

82)
$$\pm\frac{\pi}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sqrt{\frac{\zeta}{2}}\, e^{-\sigma^2\zeta}\, d\zeta = g_c - ig_s$$

ergeben. Die Vorzeichen bestimmt man am einfachsten, indem

man benutzt, daß h_e und g_e für $\psi = 0$, d. h. für $Q = 0$, positiv sein müssen.

Setzt man, ähnlich wie S. 22,

83) $$P + iQ = Re^{2i\chi},$$

so wird für

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad +\frac{\pi}{2},$$

$$2\chi = -\bar{\psi}, \quad 0, \quad +\bar{\psi},$$

und es findet sich

84) $$h_e = +\frac{\cos\chi}{\sqrt{2\pi r R}}, \qquad h_o = +\frac{\sin\chi}{\sqrt{2\pi r R}},$$

85) $$g_e = +\frac{\pi\cos 3\chi}{\sqrt{2\pi r R^3}}, \qquad g_o = +\frac{\pi\sin 3\chi}{\sqrt{2\pi r R^3}}.$$

15) Das Bereich, in dem Beugungserscheinungen in erster Linie zu erwarten sind, ist das Bereich III, das die geometrische Schattengrenze $\psi = 0$ enthält.

Nach (74) wird hier in der eingeführten Annäherung

86) $$\begin{aligned} A^2 &= \tfrac{1}{2}K^2((h_e+g_o)^2+(h_e-g_o)^2) \\ &= \frac{K^2}{4\pi r R}\left(1+\frac{\sin 2\chi}{rR}+\frac{1}{(2rR)^2}\right). \end{aligned}$$

Für R und χ gilt nach (63) und (64)

$$R = \frac{2\pi}{\lambda}\,\frac{1-\cos\bar{\psi}\cos\psi}{\cos\bar{\psi}}, \qquad \sin 2\chi = \frac{\sin\bar{\psi}\sin\psi}{1-\cos\bar{\psi}\cos\psi};$$

für $\psi = 0$ ist $R = |P|$, und bei den eingeführten Annahmen ist das erste Glied des Ausdruckes (86) für den Werth von A^2 in erster Linie maßgebend. Dasselbe lautet ausführlich

87) $$A^2 = \frac{K^2\lambda\cos\bar{\psi}}{8\pi^2 r(1-\cos\bar{\psi}\cos\psi)}$$

und zeigt, daß A^2 ein Maximum in der Mitte des Bereiches III, d. h. in der geometrischen Schattengrenze besitzt, und nach beiden Seiten hin abnimmt. Die Berücksichtigung des zweiten kleineren Gliedes ergiebt, daß der Abfall nach der negativen Seite stärker ist, wie nach der positiven.

In dem Bereich II gilt für A^2 nach (74) und (67) dieselbe Formel, wie in III; A^2 nimmt also dort mit (über $-\bar{\psi}$) abnehmendem ψ bis an den in der Nähe von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ zu denkenden schwarzen Schirm noch weiter ab.

Im Bereich IV ist nach (75) und (67)

$$88) \quad A^2 = K^2 (e^{-2rQ} + e^{-rQ}\sqrt{2}[(h_s - g_c)\sin(rP+\tfrac{1}{4}\pi) - (h_c + g_s)\cos(rP+\tfrac{1}{4}\pi)]) + \tfrac{1}{2}K^2((h_s-g_c)^2+(h_c+g_s)^2).$$

Der hier in der eckigen Klammer befindliche Ausdruck läßt sich auch schreiben:

$$-\left[\frac{\pi}{\sqrt{2\pi r R^3}}\sin(rP+\tfrac{1}{4}\pi+3\chi) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r R}}\cos(rP+\tfrac{1}{4}\pi+\chi)\right];$$

das letzte abgesonderte Glied in (88) ist mit dem gesammten A^2 in (86) identisch.

Da P und χ von ψ abhängen, so ergiebt Formel (88) wegen der Sinus- und Cosinus-Ausdrücke im allgemeinen die Möglichkeit einer Folge von Maxima und Minima der Intensität. Indessen wird bei einem wachsenden Werth des Winkels $\bar{\psi}$ die Größe rQ, die in dem in Betracht kommenden Bereich für $\bar{\psi} < \psi < \frac{1}{2}\pi$ größer als $2\pi r \sin^2\bar{\psi}/\lambda\cos\bar{\psi}$ ist, bald so beträchtlich, daß jene periodischen Wechsel unmerklich werden. Schließlich bleibt nur dasselbe Gesetz für A^2 übrig, das in den Bereichen II und III gültig ist, und wenn man nach Wahrscheinlichkeit ein ähnliches für das dieser angenäherten Betrachtung nicht zugänglichen Bereich Γ um $\psi = \pm\bar{\psi}$ annimmt, so besteht der ganze Verlauf der Intensität von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ bis $+\frac{1}{2}\pi$ in einem Ansteigen von einem sehr geringen Ausgangswerth bis zu einem Maximum bei $\psi = 0$ und einem darauf folgenden ein wenig langsameren Abfallen. Dies ist in der That das, was ich als Resultat der Beobachtung in kleiner Entfernung r bereits vor Aufstellung der Theorie mitgetheilt habe[1]).

Es mag noch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, wie vollständig die Beugungserscheinung des einfachen Randes durch die Inhomogenität der einfallenden Welle gegenüber dem bekannten Phänomen bei homogenen Wellen verändert wird. Im letzteren Falle befindet sich in der geometrischen Schattengrenze $\psi = 0$ keineswegs ein Intensitätsmaximum. Die von $\psi = -\frac{1}{2}\pi$ her langsam ansteigende Intensität hat hier vielmehr noch nicht ein Viertel der im ersten Maximum stattfindenden erreicht; das erste

1) W. Voigt, Gött. Nachr. l. c. p. 14.

Maximum selbst tritt hier bei einem kleinen positiven Werth von ψ ein, und ihm reihen sich weitere Minima und Maxima in immer dichterer Folge und mit immer geringerer Werthdifferenz an, bis schließlich merklich dieselbe constante Intensität Platz greift, die bei Abwesenheit des dunkeln Schirmes vorhanden sein würde.

Es bietet keine Schwierigkeit sich vorzustellen, wie dieser Verlauf bei wachsender Inhomogenität der einfallenden Welle schließlich in den oben abgeleiteten übergeht.

Im Vorstehenden ist nur der einfachste Fall eines absolut schwarzen Beugungsschirmes, soweit ein solcher durch einen Verzweigungsschnitt der zweiblättrigen Ebene repräsentirt werden durfte, in Betracht gezogen. Es hat gar keine principielle Schwierigkeit, die Formeln für den Fall eines vollständig reflektirenden Schirmes in der von Herrn Sommerfeld angegebenen Weise zu erweitern. Wegen der dabei eintretenden weiteren Complication der schon im einfachsten Falle reichlich complicirten Formeln und wegen des Fehlens eines aktuellen Interesses mag indessen davon Abstand genommen werden.

Göttingen, Januar 1899.

Ueber die Arbeit, welche in größeren Funkenstrecken einer Töplerschen Influenzmaschine verbraucht wird.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 14. Januar 1899.

Zu Untersuchungen über Gas-Entladungen habe ich vor zwei Jahren eine vierzig-plattige Töplersche Influenzmaschine angeschafft. Sie war nach besonderen Angaben von Herrn Töpler gebaut worden und war die stärkste bis dahin konstruierte. Nach freundlichen Mittheilungen von Herrn Max Töpler wurde darnach eine noch kräftigere gebaut; bei dieser sollten genaue Arbeits messungen ausgeführt und publiciert werden. Ich habe bei der von mir gebrauchten Maschine eine Reihe solcher Arbeitsmessungen gemacht. Mein Zweck war dabei mehr, mich mit den Eigenthümlichkeiten der Maschine vertraut zu machen, als jene Arbeitsleistungen systematisch und nach allen Richtungen hin zu untersuchen. Die im Folgenden mitgetheilten Ergebnisse haben aber doch vielleicht auch neben den von Herrn Töpler zu erwartenden Untersuchungen noch einiges Interesse.

Zum Antriebe der Maschine diente ein Elektromotor von Siemens, der bei einer Spannung von 110 Volt und bei einer Tourenzahl von 1050 in der Minute 0.6 P.S. liefert. Bei den vorliegenden Versuchen wurde der Motor in der Regel mit einer Spannung von 70 Volt, in einigen Fällen mit einer solchen von 80 Volt getrieben. Der Motor hat eine einfache Schenkelwickelung, welche zu dem Anker im Nebenschluß liegt. In den Hauptstrom, d. h. zwischen die Polklemmen der Akkumulatorenbatterie und den Motor, war ein Regulierwiderstand eingeschaltet. Der Widerstand in diesem konnte stufenweise von 19.03 Ohm auf 0.21 Ohm ernie-

drigt werden. Ein zweiter Regulierwiderstand befand sich im Nebenschluß; sein Maximalwiderstand betrug 113.18 Ohm; in der Regel waren seine Widerstände sämmtlich ausgeschaltet und er bot dann nur noch einen kaum in Betracht kommenden Widerstand von 0.12 Ohm. Wir geben zunächst einige Formeln, welche theils zur Berechnung der Arbeit, theils zur Controle der Beobachtungen dienten. Die dabei angewandten Bezeichnungen sind folgende: E Spannung zwischen den Polklemmen der Akkumulatorenbatterie; E_a Klemmenspannung des Ankers; e elektromotorische Gegenkraft in dem Anker; r_a Widerstand des Ankers; r_n Gesammtwiderstand im Nebenschluß; R Gesammtwiderstand in der Zuleitung (zwischen den Polklemmen der Batterie und den Polklemmen des Ankers); J Stromstärke in der Zuleitung; i_a Stromstärke im Anker; i_n Stromstärke im Nebenschluß; A die vom Anker in 1 sec. geleistete Arbeit; die Formeln sind:

$$e = E_a - r_a i_a.$$
$$A = e i_a.$$
$$R = \frac{E - E_a}{J}.$$
$$r_n = \frac{E_a}{i_n}.$$

Die Spannungen E und E_a wurden mit einem Torsionsvoltmeter gemessen; durch Vergleichung mit einem Siemens'schen Präcisions-Volt- und Ampermeter ergaben sich folgende Reduktionsfactoren für die Gradtheilung auf der Scheibe des Torsionsvoltmeters:

Grade des Voltmeters.	Reduktionsfactoren auf Volt.
43	1.1030
64	1.1018
55	1.1009
36	1.0991

Die Stromstärken J und i_n wurden mit Ampermetern gemessen. Zur Beobachtung der Stromstärke J diente in der Regel ein bis 3 Amper zeigendes Instrument, welches im Folgenden als Ampermeter I bezeichnet werden soll; in einigen wenigen Fällen, in denen die Stromstärke sehr nahe auf 3 Amper stieg, oder sogar etwas darüber hinaus gieng, wurde zur Controle ein Ampermeter II benützt, das bis zu 10 Amper zeigte. Die Stromstärke im Nebenschluß wurde mit einem bis 0.3 Amper gehenden Instrument

gemessen, welches im Folgenden mit III bezeichnet ist. Die Angaben der Ampermeter wurden gleichfalls auf das Siemens'sche Normalinstrument reduciert. Für das Ampermeter I ergab sich der Reduktionsfaktor 1.0135; für II der Faktor 0.944. Bei einigen wenigen Beobachtungen waren die Ampermeter I und II hinter einander in den Strom eingeschaltet; es fand dann zwischen denselben vermuthlich eine kleine Wechselwirkung statt, so daß der Reduktionsfaktor von I auf 1.0138, der von II auf 0.950 stieg. Für Ampermeter III ergab sich der Reduktionsfaktor 1.0018.

Bei allen Beobachtungen wurden die Tourenzahlen des Motors und der Maschine mit Hülfe eines Zählers und eines Sekunden-Schlägers bestimmt. Das Intervall zwischen zwei Schlägen des letzteren ergab sich zu 1.0450 sec.

Der Widerstand des Ankers wurde unmittelbar nach jeder Beobachtung aufs neue bestimmt; ebenso der Widerstand im Nebenschluß, um dadurch eine Kontrole für die Beobachtungen zu gewinnen.

Abhängigkeit der Arbeit von der Tourenzahl der Maschine.

Die Beobachtungen wurden in der Weise ausgeführt, daß mit Hülfe des in der Zuleitung liegenden Rheostaten zunächst auf eine passende Stromstärke und Umdrehungszahl eingestellt wurde. Sobald der stationäre Zustand eingetreten war, wurden die Stromstärken J und i_1, sowie die Spannungen E und E_a abgelesen; hierauf wurden die Umdrehungen des Motors und der Maschine während fünfzig Schlägen des Sekundenzählers gezählt; darauf abermals die Stromstärken J und i_1 abgelesen, von neuem die Tourenzahlen des Motors und der Maschine bestimmt, und endlich noch einmal die Werthe von J, i_1, E und E_a gemessen. Hierauf wurden durch Aenderung des in der Zuleitung liegenden Widerstandes Stromstärke und Umdrehungszahl geändert und für die neuen Verhältnisse in derselben Weise wie vorher die in Betracht kommenden Größen gemessen. Nachher wurde der Contakt des Regulierwiderstandes wieder auf den ursprünglich gewählten Punkt zurückgestellt, und es wurden die erwähnten Messungen in derselben Reihenfolge noch einmal wiederholt. Der ganze Satz von Beobachtungen nahm eine Zeit von etwa 40 Minuten in Anspruch. Es war dann bei der eisernen Rolle der Maschine zuweilen eine leichte Erwärmung zu fühlen; bei der hölzernen Rolle des Motors war eine solche nicht wahrzunehmen. Die Erwärmung rührte offenbar von einem schwachen Gleiten der Lederschnur auf der Rolle

der Maschine her, welches bei nachlassender Spannung der Schnur eintrat.

Die Resultate der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt; der bei der Berechnung von e gebrauchte Widerstand des Ankers betrug im Mittel 2.497 Ohm. A ist die von dem Anker in der Sekunde geleistete Arbeit in Watt ausgedrückt; n_2 bezeichnet die Umdrehungszahl der Maschine für die Sekunde berechnet; n_1 ebenso die Umdrehungszahl des Motors.

i_a	e	A	n_2	A/n_2	n_1/n_2	α
2.53	43.3	109.2	11.90	9.19	1.059	
2.26	61.0	137.8	13.88	9.95	1.051	0.434
2.36	44.8	105.8	11.81	8.96	1.052	
2.25	61.5	138.0	12.98	10.62	1.108	
2.36	44.9	105.9	11.23	9.42	1.110	0.562
2.20	61.4	135.0	13.14	10.28	1.101	
2.82	40.6	114.3	11.80	9.70	1.090	
2.45	60.0	146.9	14.11	10.40	1.060	0.326
2.65	42.3	112.0	11.70	9.57	1.118	
2.42	49.0	118.4	11.71	10.11	1.048	
2.10	73.2	153.7	13.88	11.08	1.110	0.442
2.34	49.8	116.4	11.58	10.07	1.090	
2.69	41.2	110.9	11.05	10.01	1.111	
2.24	71.7	160.6	13.91	11.52	1.096	0.464
2.64	42.5	112.0	10.88	10.30	1.110	
2.29	53.7	117.4	12.00	9.79	1.090	
2.09	72.4	151.1	13.67	11.08	1.121	0.745
2.19	54.0	118.1	11.98	9.88	1.108	

Die absoluten Werthe der Arbeit, welche bei einer Umdrehung der Maschine geleistet wird, sind an den verschiedenen Beobachtungstagen ziemlich verschieden. Aus jedem einzelnen Beobachtungssatze ergiebt sich aber sicher, daß die Arbeit A/n_2 mit wachsender Tourenzahl n_2 steigt. Man kann versuchen, die Arbeit als Funktion der Tourenzahl in erster Annäherung durch die Formel

$$\frac{A}{n_2} = \alpha + \alpha n_2$$

darzustellen. Für α ergeben sich dann aus den einzelnen Beobach-

tungssätzen die in der letzten Kolumne angegebenen Werthe. Im Mittel wird

$$\alpha = 0.495.$$

Arbeit in einer Funkenstrecke.

Die Beobachtungen wurden in der folgenden Weise ausgeführt. Die Conduktoren der Maschine wurden zuerst in unmittelbare Berührung gebracht. Der Strom in dem Elektromotor wurde geschlossen; sobald der stationäre Zustand eingetreten war, wurden die Spannungen, Stromstärken und Tourenzahlen in derselben Reihenfolge gemessen, wie bei den vorhergehenden Beobachtungen. Sodann wurden, während der Motor im Gang blieb, die Conduktoren bis auf die gewünschte Entfernung auseinandergezogen, und so die Funkenstrecke eingeschaltet. Nach Eintritt des stationären Zustandes wurden die in Betracht kommenden Größen in derselben Reihenfolge wie zuvor gemessen. Nachher wurden die Conduktoren wieder bis zur Berührung zusammengeschoben und die früheren Messungen wiederholt.

Die Ergebnisse der Beobachtungen sind in der folgenden Tabelle enthalten. Der Mittelwerth von r_a war bei diesen Beobachtungen 2.557.

Funken.	i_a	e	A	n_2	A/n_2	n_1/n_2
0	2.25	61.4	137.9	12.82	10.71	1.079
2 cm	2.53	59.7	151.0	12.58	12.00	1.048
0	2.16	61.0	131.8	12.92	10.19	1.080
0	2.09	62.0	129.5	13.37	9.70	1.078
2 cm	2.41	60.4	145.3	13.02	11.17	1.073
0	2.09	61.8	129.0	13.46	9.61	1.061
0	2.25	61.3	138.0	13.00	10.61	1.082
2 cm	2.53	59.7	151.0	12.78	11.81	1.060
0	2.21	60.7	134.1	13.10	10.25	1.079
0	2.17	61.6	133.5	12.90	10.32	1.049
4 cm	2.50	59.7	149.1	12.55	11.90	1.050
0	2.08	61.2	127.1	13.10	9.75	1.061
0	2.19	61.9	135.3	13.10	10.33	1.090
4 cm	2.55	60.5	154.1	12.69	12.17	1.146
0	2.15	61.7	132.8	13.29	10.01	1.102

Funken	i_0	e	A	n_2	A/n_2	n_1/n_2
0	2.21	61.6	136.0	13.07	10.40	1.068
4 cm	2.54	60.4	153.1	12.70	12.07	1.088
0	2.18	61.7	134.4	13.20	10.20	1.096
0	2.14	61.5	131.5	13.06	10.09	1.064
6 cm	2.82	58.7	165.5	12.22	13.52	1.064
0	2.36	60.2	142.0	12.61	11.21	1.088
0	2.24	60.4	135.0	13.24	10.22	1.050
6 cm	2.88	57.7	166.1	12.69	13.10	1.052
0	2.15	60.6	129.8	13.43	9.70	1.110
0	2.24	60.1	134.8	13.23	10.19	1.078
6 cm	2.88	57.3	164.9	12.67	13.00	1.078
0	2.23	60.0	133.8	13.37	10.10	1.052
0	2.19	60.8	133.1	12.81	10.39	1.088
8 cm	2.59	58.9	152.4	12.30	12.39	1.091
0	2.29	60.0	136.7	12.77	10.70	1.059
0	2.22	61.1	135.7	12.81	10.61	1.070
8 cm	2.40	60.2	144.3	12.73	11.34	1.049
0	2.07	61.0	126.1	13.04	9.69	1.051
0	2.29	60.7	139.0	13.08	10.61	1.100
8 cm	2.64	59.3	156.2	12.79	12.21	1.077
0	2.19	60.5	132.4	13.10	10.11	1.079

Die mit und ohne Funkenstrecke gefundenen Werthe von A/n_2 sind mit einander nicht unmittelbar vergleichbar wegen der Verschiedenheit der Umdrehungszahlen. Es wurden daher die ohne Funkenstrecke gefundenen Werthe mit Hülfe des im vorhergehenden Abschnitt abgeleiteten Faktors auf die Umdrehungszahl reduciert, welche jeweilig bei eingeschalteter Funkenstrecke gefunden worden war. Die so berechneten Werthe von A/n_2 wurden nun von den entsprechenden Werthen bei eingeschalteter Funkenstrecke subtrahiert. Die Differenz giebt dann die Arbeit, welche bei einer Umdrehung der Maschine in der Funkenstrecke geleistet wurde. Die gefundenen Arbeiten, ausgedrückt in Watt, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Funkenstrecke.	Arbeit in der Funkenstrecke bei einer Umdrehung der Maschine in Volt-Amper-sec.		
2 cm	1.69	1.71	1.51
4 cm	2.09	2.25	1.89
6 cm	3.17	3.46	3.17
8 cm	2.10	1.28	2.00

Bei Einschaltung der Funkenstrecke von 8 cm Länge erfolgten ab und zu innere Entladungen der Maschine. Jede derselben war mit einem plötzlichen Zurückschwanken der Stromstärke J verbunden. Die Bestimmung von J wurde dadurch unsicher und dies ist der Grund für den erheblich abweichenden Werth in der vierten Horizontalreihe.

Aus den Zahlen der vorhergehenden Tabelle wurden zunächst die Mittelwerthe für die in der Funkenstrecke geleisteten Arbeiten berechnet; wenn diese Werthe mit den entsprechenden mittleren Umdrehungszahlen der Maschine multipliciert werden, so ergeben sich die in der Sekunde geleisteten Arbeiten ausgedrückt in Watt. Aus den gefundenen Zahlen sind dann endlich auch die Wärmemengen berechnet, die in der Funkenstrecke in 1 sec. erzeugt wurden. Diese Zahlen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Funkenstrecke.	Arbeit bei einer Umdrehung.	Umdrehungszahl.	Arbeit in 1 sec.	g. calorieen in 1 sec.
2 cm	1.64	12.79	20.97	4.96
4 cm	2.08	12.65	26.35	6.06
6 cm	3.27	12.53	41.00	9.56
8 cm	1.79	12.61	22.59	5.39

Beim Uebergang von einer Funkenstrecke von 6 cm zu einer solchen von 8 cm erfahren Arbeit und Wärme eine sehr erhebliche Verminderung. Die Potentialdifferenz zwischen den Conduktoren muß bei Vergrößerung der Funkenstrecke wachsen. Das Resultat ist also nur dadurch zu erklären, daß bei einer Funkenlänge von 8 cm die Menge der zur Entladung kommenden Elektricität erheblich kleiner ist, als bei der Funkenlänge von 6 cm. Darauf deutet auch das verschiedene Aussehen der Entladung in den beiden Fällen.

Ich habe versucht, die im Vorhergehenden erhaltenen Resultate noch auf einem anderen Wege zu prüfen. Die beiden Conduktoren der Influenzmaschine wurden durch einen Leiterkreis mit einander verbunden. Dieser enthielt vier ziemlich gleiche, nach Hittorf mit Jodkadmiumlösung gefüllte Röhren, die ähn-

lich wie die Widerstände eines Rheostaten angeordnet waren; außerdem war eine Tangentenbussole in den Kreis eingeschaltet. Die Mitte des aus den Röhren gebildeten Widerstandsatzes war stets nach der Erde abgeleitet. Das eine oder das andere Ende desselben wurde mit dem Knopfe eines Braun'schen Elektrometers verbunden. Auf diese Weise konnte die zwischen den Enden des Jodkadmium-Widerstandes vorhandene Potentialdifferenz gefunden werden.

Es wurden zwei Beobachtungen gemacht; bei der ersten waren alle vier Jodkadmium-Röhren in den Kreis eingeschaltet. Die Stromstärke betrug 0,001216 Am, die Potentialdifferenz zwischen den Enden des Jodkadmiumwiderstandes 16900 Volt. Hieraus ergeben sich für die Arbeit in einer Sekunde 20.57 Volt-Amper. Die Umdrehungszahl der Maschine war 13.19. Die bei einer Umdrehung geleistete Arbeit ist hiernach gleich 1.56 Volt-Amper-Sekunden.

Bei einem zweiten Versuche waren nur die beiden mittleren Jodkadmium-Röhren in den Schließungskreis eingeschaltet. Die Stromstärke betrug 0.001360 Am, die Spannungsdifferenz zwischen den Enden des Jodkadmium-Widerstandes 9500 Volt, somit die Arbeit in der Sekunde 12.90 Volt-Amper. Die Umdrehungszahl der Maschine war 14.11. Für die bei einer Umdrehung der Maschine geleistete Arbeit ergaben sich hiernach 0.91 Volt-Amper-Sekunden. Der Widerstand von den vier Jodkadmiumröhren zusammengenommen betrug nach den Messungen 13.4×10^6 Ohm, der Widerstand der beiden mittleren 7.0×10^6 Ohm.

Wurden die Conduktoren der Maschine bis zur Berührung zusammengeschoben, so gieng die Entladung nicht durch den Schließungskreis, sondern nur durch die Conduktoren. Wurden nun diese ein wenig auseinandergezogen, so erschien zwischen ihnen ein lebhafter Funkenstrom; die Entladung gieng der Hauptsache nach durch diesen, nur zu einem Theile durch den Schließungskreis. Bei zunehmender Entfernung der Conduktoren nahm der durch den Schließungskreis gehende Strom zu. Bei einer bestimmten Entfernung aber hörte der Funkenstrom zwischen den Conduktoren plötzlich auf; war der Funkenstrom durch Auseinanderziehen der Conduktoren unterbrochen worden, so trat er umgekehrt wieder auf, wenn sie einander bis auf eine gewisse Entfernung genähert wurden. Dann war die zwischen den Enden des Jodkadmiumwiderstandes vorhandene Potentialdifferenz eben genügend, um eine Funkenentladung zwischen den Conduktoren zu erzeugen. Diese Entfernung wurde bestimmt, das einemal, als

alle vier, das anderemal, als nur die beiden mittleren Jodkadmium-Röhren in den Schließungskreis eingeschaltet waren. Im ersten Falle ergab sich eine Entfernung von 0.61 cm, im anderen eine solche von 0.30 cm. Bei einer Funkenlänge von 0.30 cm kann man hiernach die Potentialdifferenz zwischen den Conduktoren gleich 9500 Volt, bei einer Funkenlänge von 0.61 cm gleich 16900 Volt setzen.

Macht man nun die weitere Annahme, daß die Menge der bei einer Umdrehung der Maschine entladenen Elektricität dieselbe bleibe, einerlei ob der Jodkadmium-Widerstand oder die damit äquivalente Funkenstrecke in den Schließungsbogen eingeschaltet ist, so gelten die gefundenen Werthe der Arbeit auch für die äquivalenten Funkenstrecken. Somit beträgt die bei einer Umdrehung der Maschine geleistete Arbeit

in einer Funkenstrecke von 0.30 cm = 0.91 Volt-Am.-Sek.
„ „ „ „ 0.61 „ = 1.56 „ „ „ „,

Zahlen, welche im Vergleich mit den früher gefundenen etwas zu groß erscheinen.

Zur Theorie des elektrischen Antriebes der Influenzmaschine.

Wie früher sei $A = e \cdot i_a$ die von dem Elektromotor in einer Sekunde geleistete Arbeit; die von den elektrischen Wechselwirkungen zwischen den festen und den rotierenden Theilen der Töplerschen Maschine bei einer Umdrehung konsumierte Arbeit sei L. Auf den Motor und auf die Maschine wirken statische Reibungen, welche theils im Lager, theils an der Berührungsfläche von Schnur und Rolle wirken. Das von diesen Kräften um die Axe des Motors ausgeübte Drehungsmoment sei Δ_1, das ebenso auf die Maschine wirkende Drehungsmoment sei Δ_2. Außerdem wirken dynamische Reibungen in den Axenlagern, deren Momente beziehungsweise gleich $\sigma_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\sigma_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$ sein mögen, wo unter φ_1 und φ_2 die Drehungswinkel der Axen des Motors und der Maschine verstanden sind. Da eine Erwärmung der Axen auch nach dreiviertelstündigem Gang von Motor und Maschine nicht zu bemerken war, so kommen diese Reibungen praktisch kaum in Betracht. Wie schon früher erwähnt wurde, war auch bei der hölzernen Rolle des Motors keine Erwärmung zu spüren; wir schließen daraus, daß zwischen der Rolle des Motors und zwischen der Lederschnur kein Gleiten stattfand. Dagegen war wenigstens bei einem Theil der Versuche eine leichte Erwärmung der eisernen Rolle der Maschine zu beobachten. Diese mußte ihren Grund in einem Gleiten der Lederschnur haben. Den Coëfficienten der glei-

tenden Reibung zwischen Schnur und Rolle bezeichnen wir durch η, die Halbmesser der Rollen des Motors und der Maschine beziehungsweise mit r_1 und r_2. Verstehen wir endlich unter T_1 den Zuwachs, den die lebendige Kraft des ganzen Systems während einer Sekunde erleidet, so ergiebt sich:

$$T_1 = A - n_2 L - 2\pi(n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2) - 4\pi^2 \sigma_1 n_1^2 - 4\pi^2 \sigma_2 n_2^2 - 4\pi^2 \eta (n_1 r_1 - n_2 r_2)^2.$$

Da die Tourenzahlen n_1 und n_2 sich bei einem und demselben Versuche nur wenig änderten, so ist T_1 den übrigen in Betracht kommenden Größen gegenüber zu vernachlässigen. In einem besonders ungünstigen Falle belief sich T_1 auf etwa 220000 $cm^2 g sec^{-2}$, also in Volt-Amper auf 0.022, eine Größe, die den sonstigen Arbeitswerthen gegenüber in der That nicht in Betracht kommt.

Setzen wir dementsprechend $T_1 = 0$, so ergiebt sich:

$$\frac{A}{n_2} = L + 2\pi\left(\frac{n_1}{n_2}\Delta_1 + \Delta_2\right) + 4\pi^2 n_2 \left\{\sigma_1 \frac{n_1^2}{n_2^2} + \sigma_2 + \eta\left(\frac{n_1}{n_2} r_1 - r_2\right)^2\right\}.$$

Bei konstantem Verhältniß der Tourenzahlen n_1 und n_2 hängt A/n_2 in linearer Weise von n_2 ab, auch dann, wenn L von n_2 unabhängig ist.

Wir wollen annehmen, die vorhergehende Gleichung beziehe sich auf einen Versuch ohne Funkenstrecke. Bei einem Versuche mit eingeschalteter Funkenstrecke, aber bei unveränderten Tourenzahlen, sei die Arbeit des Motors in der Sekunde gleich A', die Arbeit der elektrischen Kräfte in der Maschine bei jeder Umdrehung gleich L', dann gilt die Gleichung:

$$\frac{A'}{n_2} = L' + 2\pi\left(\frac{n_1}{n_2}\Delta_1 + \Delta_2\right) + 4\pi^2 n_2 \left\{\sigma_1 \frac{n_1^2}{n_2^2} + \sigma_2 + \eta\left(\frac{n_1}{n_2} r_1 - r_2\right)^2\right\}.$$

Somit:

$$\frac{A'}{n_2} - \frac{A}{n_2} = L' - L,$$

und dies ist die Gleichung, nach der wir die Arbeit in der Funkenstrecke früher berechnet haben. Uebrigens war bei den Versuchen mit eingeschalteten Funkenstrecken das Gleiten der Schnur in der Regel sehr gering, es war daher auch nur ausnahmsweise eine Erwärmung der Maschinenrolle zu fühlen.

alle vier, das anderemal, als nur die beiden mittleren Jodkadmium-Röhren in den Schließungskreis eingeschaltet waren. Im ersten Falle ergab sich eine Entfernung von 0.61 cm, im anderen eine solche von 0.30 cm. Bei einer Funkenlänge von 0.30 cm kann man hiernach die Potentialdifferenz zwischen den Conduktoren gleich 9500 Volt, bei einer Funkenlänge von 0.61 cm gleich 16900 Volt setzen.

Macht man nun die weitere Annahme, daß die Menge der bei einer Umdrehung der Maschine entladenen Elektricität dieselbe bleibe, einerlei ob der Jodkadmium-Widerstand oder die damit äquivalente Funkenstrecke in den Schließungsbogen eingeschaltet ist, so gelten die gefundenen Werthe der Arbeit auch für die äquivalenten Funkenstrecken. Somit beträgt die bei einer Umdrehung der Maschine geleistete Arbeit

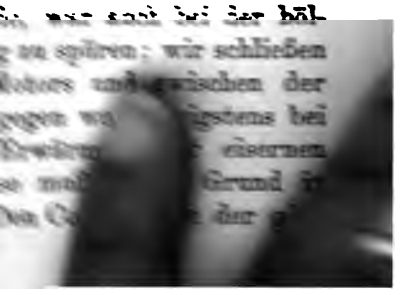
in einer Funkenstrecke von 0.30 cm = 0.91 Volt-Am.-Sek.

„ „ „ „ 0.61 „ = 1.56 „ „ „ „

Zahlen, welche im Vergleich mit den früher gefundenen etwas zu groß erscheinen.

Zur Theorie des elektrischen Antriebes der Influenzmaschine.

Wie früher sei $A = e \cdot i_1$ die von dem Elektromotor in einer Sekunde geleistete Arbeit; die von den elektrischen Wechselwirkungen zwischen den festen und den rotierenden Theilen der Töpler'schen Maschine bei einer Umdrehung konsumierte Arbeit sei l. Auf den Motor und auf die Maschine wirken statische Reibungen, welche theils im Lager, theils an der Berührungsfläche von Schnur und Rolle wirken. Das von diesen Kräften um die Axe des Motors ausgeübte Drehungsmoment sei J_1, das ebenso auf die Maschine wirkende Drehungsmoment sei J_2. Außerdem wirken dynamische Reibungen in den Axenlagern, deren Momente beziehungsweise gleich $\varepsilon_1 \frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\varepsilon_2 \frac{d\varphi_2}{dt}$ sein mögen, wo unter φ_1 und φ_2 die Drehungswinkel der Axen des Motors und der Maschine verstanden sind. Da eine Erwärmung der Axen auch nach dem unterbrochenen Gang von Motor und Maschine nicht zu bemerken war, so können diese Reibungen praktisch kann in Betracht



kommen.

tenden Reibung zwischen Schnur und Rolle bezeichnen wir durch η, die Halbmesser der Rollen des Motors und der Maschine beziehungsweise mit r_1 und r_2. Verstehen wir endlich unter T_1 den Zuwachs, den die lebendige Kraft des ganzen Systems während einer Sekunde erleidet, so ergiebt sich:

$$T_1 = A - n_2 L - 2\pi (n_1 \Delta_1 + n_2 \Delta_2) - 4\pi^2 \sigma_1 n_1^2 - 4\pi^2 \sigma_2 n_2^2 - 4\pi^2 \eta (n_1 r_1 - n_2 r_2)^2.$$

Da die Tourenzahlen n_1 und n_2 sich bei einem und demselben Versuche nur wenig änderten, so ist T_1 den übrigen in Betracht kommenden Größen gegenüber zu vernachlässigen. In einem besonders ungünstigen Falle belief sich T_1 auf etwa 220000 $cm^2 g sec^{-2}$, also in Volt-Amper auf 0.022, eine Größe, die den sonstigen Arbeitswerthen gegenüber in der That nicht in Betracht kommt.

Setzen wir dementsprechend $T_1 = 0$, so ergiebt sich:

$$\frac{A}{n_2} = L + 2\pi \left(\frac{n_1}{n_2} \Delta_1 + \Delta_2 \right) + 4\pi^2 n_2 \left\{ \sigma_1 \frac{n_1^2}{n_2^2} + \sigma_2 + \eta \left(\frac{n_1}{n_2} r_1 - r_2 \right)^2 \right\}.$$

Bei konstantem Verhältniß der Tourenzahlen n_1 und n_2 hängt A/n_2 in linearer Weise von n_2 ab, auch dann, wenn L von n_2 unabhängig ist.

Wir wollen annehmen, die vorhergehende Gleichung beziehe sich auf einen Versuch ohne Funkenstrecke. Bei einem Versuche mit eingeschalteter Funkenstrecke, aber bei unveränderten Tourenzahlen, sei die Arbeit des Motors in der Sekunde gleich A', die Arbeit der elektrischen Kräfte in der Maschine bei jeder Umdrehung gleich L', dann gilt die Gleichung:

$$\frac{A'}{n_2} = L' + 2\pi \left(\frac{n_1}{n_2} \Delta_1 + \Delta_2 \right) + 4\pi^2 n_2 \left\{ \sigma_1 \frac{n_1^2}{n_2^2} + \sigma_2 + \eta \left(\frac{n_1}{n_2} r_1 - r_2 \right)^2 \right\}.$$

Somit:

$$\frac{A'}{n_2} - \frac{A}{n_2} = L' - L,$$

und [illegible] Gleichung, nach der wir die Arbeit in der Funken[illegible]er berechnet haben. Uebrigens war bei den Versuch[illegible]geschalteten Funkenstrecken das Gleiten der Schnur [illegible]ehr gering, es war daher auch nur ausnahmsweise [illegible]ng der Maschinenrolle zu fühlen.

Eine neue Eigenschaft der Kugel.

Von

H. Liebmann.

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Januar 1899 von D. Hilbert.

§ 1. Vorbemerkung.

In der Ebene ist der Kreis die einzige Curve constanter Krümmung.

Im dreidimensionalen Raum lautet der entsprechende Satz:

Die Kugel ist die einzige geschlossene singularitätenfreie Fläche constanten positiven Krümmungsmaaßes.

Wir betonen das Wort: singularitätenfrei; denn geschlossene Flächen constanten positiven Krümmungsmaaßes mit singulären Puncten oder Linien giebt es.

Ein Beispiel für den ersteren Fall sind die Rotationsflächen constanten positiven Krümmungsmaaßes vom spindelförmigen Typus [1]). Eine solche Spindel hat zwei singuläre Puncte und ist eine geschlossene Fläche.

Ein Beispiel für den zweiten Fall erhält man einfach, indem man die Kugel „eindrückt", d. h. indem man die Kugel mit einer Ebene schneidet und eine der beiden Calotten an dieser Ebene spiegelt. Die aus zwei Stücken einer Kugeloberfläche bestehende Fläche, welche zusammengesetzt ist aus der gespiegelten und der nicht gespiegelten Calotte bezeichnen wir mit dem Namen „eingedrückte Kugel". Diese eingedrückte Kugel hat constantes

1) Man vergleiche: Dyck, Katalog mathematischer Modelle p. 291. No. 216.

positives Krümmungsmaaß und ist geschlossen; sie hat aber eine singuläre Linie, nämlich den Rand der eingedrückten Calotte. —

Wir sprechen noch den Satz aus[1]), der eine Folgerung der ersten ist:

Die Kugel läßt sich als geschlossene Fläche nicht verbiegen, ohne daß Singularitäten auftreten.

Ein Beweis der genannten Sätze, die eine wichtige und einfache Eigenschaft der Kugel enthalten, findet sich in den bisherigen Untersuchungen über Flächen constanten positiven Krümmungsmaaßes nirgends, und es ist daher nicht ohne Interesse, dieselben direct zu beweisen.

Er ergiebt sich nämlich auch, wie Herr Prof. Hilbert mir gütigst mitgeteilt hat, als Folgerung aus allgemeineren Untersuchungen von Herrn Prof. Minkowski, die aber noch nicht veröffentlicht sind.

In den folgenden Paragraphen wird nun ein Beweis gegeben, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß die Fläche analytisch ist, d. h., daß z durch Drehung des Coordinatensystems in jedem Punct in eine reguläre analytische Function von x und y verwandelt werden kann.

§ 2. Beweismethode.

Der Gang des Unmöglichkeitsbeweises wird folgender sein:

Wir gehen von der Annahme aus, daß es eine von der Kugel verschiedene Fläche constanten positiven Krümmungsmaaßes giebt (wir wollen eine solche Fläche mit dem Namen Sphäroid bezeichnen), untersuchen die Folgerungen aus dieser Annahme und werden dabei auf einen Widerspruch stoßen.

Der Widerspruch wird der sein, daß aus der Existenz des Sphäroïdes die Existenz einer bestimmten (im folgenden Paragraphen weiter zu untersuchenden Fläche) der Kernfläche folgen würde, welche einerseits ganz im Endlichen bleibt, und andrerseits sich nach keiner Richtung hin durch eine Ebene abgrenzen läßt.

Dies letztere ist so zu verstehen: Eine Ebene grenzt eine Fläche ab, wenn sie selbst Puncte der Fläche enthält, und den Raum in zwei Teile zerlegt, von denen nur der eine Puncte der Fläche enthält. (So grenzt eine Tangentialebene die Kugel ab,

1) Zuerst (ohne Beweis) ausgesprochen von Minding (Crelle's Journal B. 18 p. 368) 1838.

so wird ein Halbkegel abgegrenzt durch eine Ebene, welche durch die Spitze geht und ihn nicht schneidet).

Wenn nun eine Fläche, die noch so compliciert gestaltet sein mag, also Spitzen, Kanten, Durchdringungscurven in beliebiger Anzahl besitzt, auch aus beliebig vielen getrennten Stücken besteht, ganz im Endlichen bleibt, so muß es in jeder Richtung (d. h. parallel zu jeder Ebene durch den Coordinatenanfang) abgrenzende Ebenen geben. Kann man eine einzige Richtung angeben, in der es eine abgrenzende Ebene nicht giebt, dann kann die Fläche nicht ganz im Endlichen liegen.

Von der Kernfläche werden wir nun viel mehr zeigen, nämlich daß es überhaupt keine abgrenzende Ebene giebt. Dies steht im Widerspruch mit ihrer anderen Eigenschaft, ganz im Endlichen zu bleiben.

Dieser Widerspruch läßt sich dann nur durch die Annahme vermeiden, daß die Kugel das einzige Sphäroid ist.

§ 3. Die Kernfläche.

Bonnet[1]) hat zuerst gezeigt, daß sich zu jeder Fläche constanten positiven Krümmungsmaaßes (wir setzen dasselbe = 1) zwei gewisse Parallelflächen constanter mittlerer Krümmung construieren lassen.

Trägt man nämlich auf den Normalen einer solchen Fläche nach außen die Strecke 1 ab, so bekommt man eine Fläche constanter positiver mittlerer Krümmung (= 1), trägt man sie nach innen ab, so bekommt man eine Fläche constanter negativer mittlerer Krümmung (= −1).

Bezeichnen wir die Krümmungsradien der drei Flächen in entsprechenden Puncten mit $r_1 r_2$ bez. R_1, R_2 und ϱ_1, ϱ_2, so bestehen die Relationen:

$$R_1 - 1 = r_1 = \varrho_1 + 1 \text{ und}$$
$$R_2 - 1 = r_2 = \varrho_2 + 1.$$

Diese beiden Parallelflächen wollen wir nun beim Sphäroid construieren und sie fortan mit dem Namen „Mantelfläche“ und „Kernfläche“ bezeichnen.

Bei der Kugel ist die Kernfläche ein Punct, die Mantelfläche eine Kugel mit dem doppelten Radius der ersten Kugel.

---

1) Man vergleiche: Bianchi, Differentialgeometrie, deutsch von Lukat. Leipzig 1898 p. 478.

Wir wollen hier noch etwas bei der Kernfläche verweilen und einige einfache Eigenschaften derselben aufzählen.

1. Sie hat negative Krümmung.
2. Sie bleibt ganz im Endlichen.
3. Es ist möglich, daß sie sich selbst durchdringt in Puncten oder Curven.
4. Den Nabelpuncten des Sphäroids (N_s) entsprechen Spitzen auf der Kernfläche (N_k), denn in den Puncten N_k verschwinden die Krümmungsradien der Kernfläche, weil daselbst $\varrho_1 = \varrho_2 = r_1 - 1 = r_2 - 1 = 0$ ist, wegen $r_1 = r_2 = 1$.
5. Trotz der verschiedenen Singularitäten, welche auftreten können, besteht doch folgender Satz:

Man kann in jedem Punct der Kernfläche die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ als reguläre analytische Functionen von zwei Parametern darstellen. Durchdringen sich verschiedene Teile in dem Punct, so kann man für jeden dieser Teile eine solche Entwickelung angeben.

Um dies zu beweisen, legen wir folgendes Coordinatensystem zu Grund: Die xy-Ebene ist parallel zur Tangentialebene des Sphäroides, der Coordinatenanfang im Abstand 1 auf der Normale nach innen gelegen.

Das Sphäroid wird dann dargestellt durch:

$$z = f(x, y),$$

wo der Voraussetzung nach $f(x, y)$ eine analytische Function ist; die Kernfläche wird gegeben durch:

$$\xi = x + \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\eta = y + \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\zeta = z - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

und es ist evident, daß $\xi\eta\zeta$ analytische Functionen von x und y sind.

In einem Nabelpunct (N) gestalten sich die Entwickelungen in folgender Weise:

Wir setzen

$$z = \sqrt{1-x^2-y^2} + \varphi(x,y),$$

wo $\varphi(x,y)$ eine Potenzreihe ist, die mit Gliedern nicht niedriger als dritter Ordnung beginnt.

Wir brauchen nun für das Folgende die Anfangsglieder der Reihenentwickelung von ξ, η und ζ, und wir müssen zu diesem Zwecke $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ berechnen, also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

und hieraus weiter:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2-y^2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x}+y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+(1-x^2-y^2)\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}}.$$

Ferner:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} =$$

$$\frac{-x+\frac{\partial \varphi}{\partial x}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2-y^2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x}+y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+(1-x^2-y^2)\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}}}$$

und:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} =$$

$$\frac{-y+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-2\sqrt{1-x^2-y^2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x}+y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+(1-x^2-y^2)\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2\right\}}}$$

Wir setzen nun

$$\varphi = \varphi_m + \varphi_n + \cdots$$

wo φ_m eine homogene Function $m\,(>2)$ten Grades von x und y ist; φ_n eine homogene Function $n$ten Grades $(n > m)$ u. s. w.

Dann ergeben sich, wenn man ξ, η und ζ nach dem auf der vorigen Seite angegebenen Schema berechnet, folgende Formeln:

$$\xi = x - x + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \cdots \qquad = \frac{\partial \varphi_m}{\partial x},$$

$$\eta = y - y + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \cdots \qquad = \frac{\partial \varphi_m}{\partial y},$$

$$\zeta = \sqrt{1-x^2-y^2} + \varphi_m + \cdots - \sqrt{1-x^2-y^2} + x\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} + \cdots = (m+1)\,\varphi_m + \cdots.$$

Hier sind in den Reihenentwickelungen überall nur die Glieder niedrigster Ordnung hingeschrieben.

6. In der vorigen Nummer ist über die Function φ und speciell über die Function φ_m keine Voraussetzung gemacht. Es ist aber klar, daß beim Sphäroid, weil es eine Fläche constanten Krümmungsmaaßes ist, die Function φ_m nicht vollkommen willkürlich sein kann. Sie wird vielmehr eine bestimmte Differentialgleichung erfüllen müssen, die wir jetzt aufstellen wollen.

Zu dem Ende müssen wir noch berechnen, welche Werte die drei zweiten Differentialquotienten von z annehmen.

Dabei ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2-1}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-xy}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2-1}{(\sqrt{1-x^2-y^2})^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

Die Forderung nun, daß das Sphäroid constantes Krümmungsmaaß hat, drückt sich darin aus, daß

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)^2 = 0$$

sein muß; also

$$\frac{(1-x^2)(1-y^2)}{(1-x^2-y^2)^2}+\frac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{y^2-1}{\sqrt{1-x^2-y^2}^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-\frac{x^2y^2}{(1-x^2-y^2)^2}+\frac{2xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}^5}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$-\left(1+\left\{\frac{x^2}{1-x^2-y^2}-\frac{2x\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{y^2}{1-x^2-y^2}-\frac{2y\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right\}\right)^2=0.$$

Entwickelt man nun und ordnet nach Potenzen von x und y, indem man wieder $\varphi=\varphi_m+\varphi_n+\cdots$ setzt, wo $m>3$ ist, so fallen die Glieder, welche von φ frei sind, fort, weil sie die Differentialquotienten für die Gleichung einer Kugel darstellen, und die Gleichung einer Kugel die Differentialgleichung identisch erfüllt.

Im übrigen lauten die Glieder niedrigster Ordnung

$$-\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial y^2}.$$

Da diese nun verschwinden müssen, so erhalten wir das wichtige Ergebnis:

Die Function φ_m erfüllt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial y^2}=0.$$

§ 4. Die Unbegrenztheit der Kernfläche.

Die Kernfläche hat überall negative Krümmung. Wenn es also in einem Punct eine Tangentialebene giebt, so schneidet sie die Fläche, wie auch jede andere Ebene, welche durch einen solchen Punct geht, die Fläche in zwei Teile schneidet.

Im allgemeinen also giebt es in einem Punct der Kernfläche keine abgrenzende Ebene.

Wir wollen nun zeigen, daß diese Eigenschaft auch in den Puncten N_1 gewahrt bleibt, die den Puncten N_2 entsprechen.

Zu diesem Zweck dient folgende Betrachtung: Wir legen eine Ebene $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta = 0$ durch den Punct N_1, nach dem wir das Coordinatensystem gewählt haben wie in No. 5 des vorigen Paragraphen.

Nun zeigen wir, daß die Function

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta$$

in der Nähe des Punctes $\xi\eta\zeta$ das Zeichen wechselt, wenn man darin für $\xi\eta\zeta$ die für die Kernfläche gegebenen Reihenentwickelungen einsetzt, welche Werte auch $\alpha\beta\gamma$ haben mögen.

Hieraus folgt dann, daß der durch die Reihenentwickelung angegebene Teil der Kernfläche im Punct N_1 nicht durch eine Ebene abgegrenzt werden kann.

Beim Beweis des Zeichenwechsels von $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta$ ist folgende Bemerkung von fundamentaler Bedeutung, die ich Herrn Prof. Hilbert verdanke.

Die Function φ_m ist, auch wenn m gerade ist, indefinit.

Daß sie in der Nähe von $x = 0$, $y = 0$, das Zeichen wechselt, wenn m ungerade ist, ist selbstverständlich, daß sie auch, wenn m gerade ist, eine indefinite Form darstellt, folgt daraus, daß φ_m, wie oben gezeigt, die Differentialgleichung des Potentials erfüllt. Jedes Potential aber, welches eine homogene ganze Function ist, ist eine indefinite Form. —

Nun unterscheiden wir weiterhin zwei Fälle.

1) φ_m ist gerade.

Dann lauten die Glieder niedrigster Ordnung von $\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta$: $\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}$ (ausgenommen im Falle $\alpha = \beta = 0$), und dies ist eine ungerade Function, die natürlich das Zeichen wechselt.

Ist $\alpha = \beta = 0$, so haben wir als Glied niedrigster Ordnung

$$\gamma(m+1)\varphi_m$$

und da φ_m undefinit ist, so wechselt auch diese Function das Zeichen in der Nähe von $x = 0$, $y = 0$.

2) φ_m ist ungerade.

Dann lauten die Glieder niedrigster Ordnung $\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}$ und dies stellt wieder eine indefinite Form dar, da mit φ_m gleichzeitig auch $\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}$ und $\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}$, also auch $\alpha\frac{\partial\varphi_m}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi_m}{\partial y}$ die Gleichung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ erfüllt, d. h. ein Potential ist und also indefinit.

Ist $\alpha = \beta = 0$, so lautet das Glied niedrigster Ordnung wie oben

$$z^{m-1}\varphi_m$$

und wechselt das Zeichen, da die Function jetzt ungerade ist.

Also sehen wir:

Auch in den Puncten N_1 giebt es keine Ebene, welche die Kernfläche abgrenzt.

§ 5. Folgerungen.

Wir haben die folgenden beiden Eigenschaften der Kernfläche kennen gelernt:

1) Die Kernfläche bleibt im Endlichen (§ 3. 2).

2) Es giebt überhaupt keine Ebene, welche die Kernfläche abgrenzt (§ 4).

Diese Eigenschaften stehen, wie schon in § 2 hervorgehoben, in Widerspruch.

Die Annahme eines von der Kugel verschiedenen Sphäroides ist also unmöglich, d. h.:

Die Kugel ist die einzige analytische Fläche constanten positiven Krümmungsmaaßes, welche geschlossen und frei von singulären Puncten oder Linien ist.

Zugleich ergiebt sich eine weitere Folgerung, welche einen schon von Lindelöf[1]) in seiner Variationsrechnung, allerdings ohne Beweis, ausgesprochenen Satz enthält:

Die Kugel ist auch die einzige geschlossene analytische singularitätenfreie Fläche constanter positiver mittlerer Krümmung.

Jede solche Fläche läßt sich ja nach § 2 auffassen als Mantelfläche eines Sphäroides; da es aber außer der Kugel kein Sphäroid giebt, so muß auch jede Mantelfläche notwendig immer eine Kugel sein.

---

1) Moigno-Lindelöf, Calcul des variations. Paris 1861. p. 350.

§ 6. Zusatz.

Der in den vorhergehenden Paragraphen bewiesene Satz läßt sich auf beliebig viele Dimensionen verallgemeinern und bekommt dann folgende Fassung:

Die n-dimensionale Hypersphäre ist die einzige geschlossene singularitätenfreie Fläche im $n+1$-dimensionalen Raum, welche constantes Kronecker'sches Krümmungsmaaß hat.

Hier verstehen wir unter dem Kronecker'schen Krümmungsmaaß das reciproke Product aus den n Hauptkrümmungsradien.

Bezeichnen wir die rechtwinkligen Coordinaten des $n+1$-dimensionalen Raumes mit $z, x_1 \cdots x_n$, und geben wir die Gleichung der Fläche in der Form

$$z = f(x_1 \cdots x_n),$$

bezeichnen wir ferner $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ mit z_i und $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$ mit z_{ik}, so lautet die Formel für das Kronecker'sche Krümmungsmaaß[1]) folgendermaaßen:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} z_{11} \cdots z_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ z_{n1} \cdots z_{nn} \end{vmatrix}}{(1+z_1^2 \cdots +z_n^2)^{\frac{n}{2}+1}}$$

Um nun zu beweisen, daß die n-dimensionale Hypersphäre wirklich die behauptete Eigenschaft besitzt, untersuchen wir wieder die Reihenentwickelung für die Parallelfläche, die man im Abstand $\sqrt{K}$ (wir wollen $K = 1$ nehmen) zur Fläche constanten Krümmungsmaaßes, construieren kann, welche geschlossen, analytisch und singularitätenfrei ist. (Wir bezeichnen sie mit dem Namen Hypersphäroid.)

Wenn wir nun das Coordinatensystem genau wie in § 3, No. 5 legen, und für z die Entwickelung annehmen

$$z = \sqrt{1-x_1^2 \cdots -x_n^2} + \varphi(x_1 \cdots x_n),$$

wo φ mit Gliedern nicht niedriger als dritten Grades beginnt, so verwandeln sich die allgemeinen Formeln für die Parallelfläche:

---

1) Kronecker, über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. Berl. Academieberichte 1869. p. 688 ff.

$$\begin{aligned}
\zeta &= z - \frac{1}{\sqrt{1+z_1^2 \cdots z_n^2}} \\
\xi_1 &= x_1 + \frac{z_1}{\sqrt{1+z_1^2 \cdots + z_n^2}} \\
&\vdots \\
\xi_n &= x_n + \frac{z_n}{\sqrt{1+z_1^2 + \cdots z_n^2}}
\end{aligned}$$

in einfachere Formeln, von denen wir nur die Anfangsglieder hinschreiben wollen.

Es sei also

$$\varphi = \varphi_m + \varphi_n \cdots$$

wo φ_m, φ_n u. s. w. homogene Functionen von $x_1 \cdots x_n$ sind, nach steigenden Graden geordnet, und wo $m \geqq 2$ ist (cf. § 3, 5).

Diese Formeln lauten:

$$\begin{aligned}
\zeta &= (m+1)\varphi_m + \cdots, \\
\xi_1 &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\xi_n &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} + \cdots.
\end{aligned}$$

Dies giebt eine Parameterdarstellung der Parallelfläche im Puncte $\zeta = 0$, $\xi_1 \cdots = \xi_n = 0$, genauer gesagt, eine Parameterdarstellung desjenigen durch den Punct 0 gehenden Teiles, welcher der Umgebung des Punctes $\zeta = 1$, $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$ des Hypersphäroides entspricht.

Nun ist φ_m noch einer bestimmten Differentialgleichung zu unterwerfen, weil das Hypersphäroid constantes Krümmungsmaaß hat.

Setzen wir

$$\psi = \sqrt{1 - x_1^2 \cdots - x_n^2},$$

so erhalten wir die Differentialgleichung, wenn wir in der Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} \psi_{11} + \varphi_{11} \cdots \psi_{n1} + \varphi_{n1} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \psi_{n1} + \varphi_{n1} \cdots \psi_{nn} + \varphi_{nn} \end{vmatrix} - (1 + (\varphi_1 + \psi_1)^2 \cdots + (\varphi_n + \varphi_n)^2)^{\frac{n}{2}+1}$$

die Glieder niedrigster Ordnung gleich Null setzen.

Bei der Entwickelung heben sich die nur von ψ herrührenden Glieder fort, und es bleiben im übrigen als Glieder niedrigster Ordnung:

$$(-1)^{n-1}\left\{\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_1^2}\cdots+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_n^2}\right\},$$

woraus wieder folgt, daß

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_1^2}\cdots+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x_n^2}=0$$

ist, also φ_n eine indefinite Form darstellt (cf. § 4, p. 51).

Hieraus folgert man wieder, genau wie in § 4, daß jede Ebene $\alpha_1\xi_1\cdots+\alpha_n\xi_n+\gamma\zeta=0$ die innere Parallelfläche in zwei Teile schneidet, daß es also keine die — im Endlichen gelegene — Parallelfläche abgrenzende Ebene giebt. Dieser Widerspruch kann auch wieder nur durch die Annahme gelöst werden, daß die Hypersphäre das einzige Hypersphäroid ist.

Göttingen, im Januar 1899.

Ueber neue Structurflächen an den Krystallen der gediegenen Metalle.

Von

O. Mügge in Königsberg in Pr.

Vorgelegt von Herrn Liebisch in der Sitzung vom 14. Januar 1899.

Nachdem an zahlreichen Krystallen Translationsfähigkeit nachgewiesen war, schien es von Interesse darauf namentlich auch die Krystalle der Metalle zu prüfen, da diese in ihren Cohäsionseigenschaften, wie in manchen andern von den gewöhnlichen Krystallen abweichen und zwar in so fern, als sie alle mehr oder minder plastisch zu sein scheinen. Die Untersuchung mußte sich wegen Mangels an geeignetem Material zunächst auf die ganz geschmeidigen und die sog. spröden Metalle beschränken, von solchen einer mittleren Stellung in dieser Hinsicht konnten vorläufig nur Eisen und Iridosmium in Betracht gezogen werden. Auch bei den hier untersuchten wäre z. Th. ein reicheres Material erwünscht gewesen.

Gold.

An Krystallen von Gold erkennt man bei mäßiger Vergrößerung sehr feine Streifen, welche auf den Würfelflächen den Diagonalen, auf den Octaederflächen parallel ihren Kanten, auf den Rhombendodekaederflächen parallel ihren langen Diagonalen und senkrecht zu ihren Kanten verlaufen. Feine Streifen nach andern Richtungen kommen nicht vor, sie entsprechen also in ihrer Gesammtheit den Tracen der Octaederflächen auf den genannten Formen. Nur ungerollte Krystalle mit glänzenden Flächen zeigen sie, solche mit schwärzlichem oder anderem Ueberzug werden auch durch Putzen zur Beobachtung nicht tauglich, da selbst vorsichtiges Reiben mit weichem Leder die Streifen schon verwischt.

Sie erscheinen meist massenhaft, in dicht gedrängten Schaaren einander parallel ziehend oder sich durchkreuzend und die gröbere und feinere mikroskopische Skulptur der Oberflächen durchquerend. Sie häufen sich namentlich längs verbogenen Ecken und Kanten, wo die Oberfläche ganz in sie gewissermaßen aufgelöst erscheint, sie sind aber so fein, daß es selbst u. d. M. nur selten gelingt, einen einzelnen Streifen von einer Fläche auf die benachbarten zu verfolgen. Am Goniometer geben sie keinen Reflex, auch nach welcher Seite ihre Grenzflächen geneigt sein könnten bleibt unentschieden; ihre Spuren verschwinden beim Behandeln mit Königswasser, anstatt wie bei Zwillingslamellen zeitweilig stärker hervorzutreten.

Dieses Verhalten macht es höchst wahrscheinlich, daß man es hier mit Translationsstreifen zu thun hat, und zwar wäre die Translationsebene $T = \{111\}$. Um die Lamellen genauer zu verfolgen und namentlich um sie auf zwei aneinanderstoßenden Flächen gleichzeitig zu übersehen, empfiehlt sich die Anwendung des Verticalilluminators für die eine Fläche und ein Kippen des Microscops so weit, daß das Licht von der zweiten Fläche direct reflectirt wird; zuweilen ist auch der kleine Klein'sche Drehapparat mit Vortheil zu benutzen. Besonders bequemes Beobachtungsmaterial sind die nach $\{111\}$ tafligen Goldblättchen von Vorospatak, wo die Streifen nicht nur auf der Tafelfläche selbst sondern namentlich auch auf den Flächen der kleinen ihr aufgesetzten dreiseitigen, von Flächen $\{110\}$ begrenzten Pyramiden gut zu sehen sind.

Die Translationsrichtung t zu ermitteln ist schwierig. Einer einzelnen Lamelle über hinreichend viele verschiedene Flächen zu folgen, um zu ermitteln, auf welcher ihre Spur schließlich verschwindet, ist schon wegen der unvollständigen Ausbildung der Krystalle kaum möglich, abgesehen davon ist man bei der Feinheit der Lamellen nie ganz sicher auf der Nachbarfläche wirklich dieselbe Lamelle zu beobachten; ferner kann wegen des ungleich hohen Glanzes dieselbe Lamelle auf einer Fläche noch erkennbar sein, auf der etwas rauheren Nachbarfläche dagegen nicht mehr, endlich brauchen die Lamellen auch nicht beliebig weit fortzusetzen, sondern können auskeilen. Man mußte sich daher damit begnügen Complexe vieler paralleler Streifen aufzusuchen, von denen man sich überzeugt hatte, daß sie (wenigstens die allermeisten) denselben Octaederflächen parallel lagen. Aber auch dann wird die Bestimmung der Translationsrichtung noch dadurch erschwert, daß die Streifen desselben Complexes sich hinsichtlich

t ganz verschieden verhalten können, da jeder Octaederfläche mindestens 3 gleichwerthige Richtungen t zukommen müssen. Nun ist es aber als wahrscheinlich anzunehmen, daß Lamellen, welche längs derselben Fläche $\{111\}$ dicht geschaart ziehen, durch denselben Stoß entstanden sind und also auch die gleiche Translationsrichtung haben, daß also auch alle Lamellen eines solchen Complexes oder wenigstens die allermeisten auf Flächen derselben Zone, nämlich ihrer Zone t verschwinden werden. Das ist nun in der That an mehreren Krystallen (von Beresowsk) der Fall; die Spuren der Lamellencomplexe verschwinden auf Flächen der Zone der Octaederkante, es ist also sehr wahrscheinlich $t = [110]$. Diese Beobachtungen konnten indessen mangels reichlicheren Materials nicht so vielfach wiederholt werden, daß Translationen nach andern Richtungen mit Sicherheit auszuschließen wären.

Versuche die Translationsrichtung durch Experiment sicherer festzustellen, waren erfolglos. Die Lamellen entstehen zwar außerordentlich leicht und zahlreich bei jedem kleinen Druck, indessen läßt sich die Druckrichtung an den kleinen Krystallen ($^1/_2$ mm) nicht so reguliren, daß sie nur nach einer Ebene $\{111\}$ sich bilden und längs dieser weit fortsetzen, denn in der Nähe der Druckstelle findet allemal sofort auch erhebliche Biegung statt, sodaß die Translation anscheinend schon in geringer Entfernung von der Druckstelle ($^1/_2$ mm) zum Stillstand kommt oder doch von der Druckrichtung abweicht. — Schlag- und Druckfiguren wurden nicht erhalten.

Silber.

Silber scheint sich ganz so wie Gold zu verhalten. Durch ihre Größe erleichtern die Krystalle die Beobachtung, indessen ist geeignetes Material wegen der leichteren Veränderlichkeit der Oberfläche, die auch hier eine Reinigung nicht verträgt, doch noch sparsamer als beim Gold. An einigen Krystallen von Kongsberg (z. Th. Göttinger Sammlung) war bequem festzustellen, daß $T = \{111\}$ ist; nur an einem Streifencomplex war die Translationsrichtung als wahrscheinlich parallel den Octaederkanten zu ermitteln.

Kupfer.

Zur Beobachtung dienten namentlich in Kalkspath eingewachsene Krystalle von Frolow, welche, wenn sie frisch herauspraeparirt sind, hohen Glanz haben. Der Verlauf der Lamellen

auf ihren Flächen {001}, {110}, {101} und einem {803} genäherten {h0l} ist überall mit der Annahme von Translationsebenen parallel {111} verträglich. Auch die Translationsrichtung ist in einigen Fällen ziemlich sicher die Octaederkante, in der Mehrzahl der Fälle ist sie aber nicht sicher bestimmbar und andere Translationsrichtungen (z. B. senkrecht zur Octaederkante an Krystallen vom Ohligerzug bei Daaden im Westerwald) daher nicht ausgeschlossen. Durch Druck sind die Lamellen wie beim Gold mit größter Leichtigkeit hervorzurufen, zur näheren Ermittlung von t konnten solche Versuche wie dort nicht dienen.

Iridosmium.

Auf wenigen Blättchen dieses Metalls ohne seitliche Begrenzung wurde an einigen, anscheinend etwas vertieften, und daher vor Abrollung geschützten Stellen eine trigonale Streifung bemerkt, welche aber erheblich gröber als die der vorher behandelten Metalle ist. Sie künstlich hervorzurufen gelang nicht. Beim Druck mit abgerundetem Stift entstehen dagegen Sprünge nach einem hexagonalen Prisma, dessen Stellung zu jenen Streifen aber nicht zu bestimmen war. Gehen die Streifen jenem Prisma parallel, so könnten sie durch verstärkte Anätzung längs diesen Spaltrissen oder Sprüngen entstanden sein.

Eisen.

Durch die Beobachtungen von G. Linck[1]) kann man als erwiesen ansehen, daß die an künstlichem Eisen angeblich zuerst von Prestel beobachteten und am Meteoreisen schon früher als Neumann'sche bekannten Linien von Lamellen herrühren, welche dem Eisen nach Flächen {112} eingeschaltet sind. Linck hält es, wie auch früher schon Sadebeck für wahrscheinlich, daß es sich hier um Zwillingslamellen handelt, welche ähnlich wie am Kalkspath secundärer Entstehung sind, und stützt dies namentlich durch die Beobachtung, daß Rhabditnadeln da, wo sie (in Meteoreisen) auf die Lamellen stoßen, z. Th. zerbrochen sind. Da das Eisen etwas geschmeidig ist und die massenhaft auftretenden Lamellen also immerhin auch Translationslamellen sein konnten, zumal Linck von quer zur Tafelfläche der Lamellen liegenden Grenzflächen nichts erwähnt, schien eine genauere Untersuchung angezeigt.

---

1) G. Linck: Zeitschr. f. Kryst. 20, 209, 1892; daselbst Litteratur-Angaben.

Als Material diente ein Block weichen Eisens, der nach den würfligen Spaltungsflächen zu schließen aus Individuen von im Mittel etwa 1 ccm Größe bestand. Er zerfällt beim Hämmern in rundlich polyedrische Stücke, deren Grenzflächen zugleich meist die Grenzen der einzelnen Krystalle sind. Die Oberfläche derselben ist im Allgemeinen glatt und glänzend, sieht aber wie überstäubt aus, und beim Hin- und Herwenden bemerkt man auf ihr zugleich dieselbe polysynthetische, verschiedenen Ebenen folgende Streifung wie auf den Spaltflächen. U. d. M. erkennt man in dem „Staub" sehr kleine napf- oder wurmförmige Vertiefungen mit etwas erhabenen Rändern, es sind sehr wahrscheinlich die Spuren von kleinen Gasbläschen oder vielmehr von Hälften derselben, indem nämlich die andere Hälfte der Oberfläche des ursprünglich benachbarten Stückes zugehört. Die Größe dieser Bläschen ist meist nur sehr gering (0,01—0,0002 mm), die wurmförmigen sind bis 0,1 mm lang; das Gas wurde offenbar während des Wachsthums der Eisenkrystalle ausgeschieden, von denselben aber nur z. Th. umschlossen, z. Th. dagegen sammelte es sich zu kleinen an der Oberfläche haftenden Bläschen, die in der festgewordenen Masse nun noch die Grenzen der Krystalle markiren und auch wohl die Ursache des relativ leichten Zerfalls des ganzen Stückes in Krystallindividuen sind. Da somit diese Bläschen in ihrer jetzigen Lage jünger als das Eisen selbst sind, ist es von Interesse u. d. M. zu sehen, daß sie von den erwähnten Lamellen durchsetzt und ihre Formen dadurch verändert werden, denn es müssen danach jene Lamellen mindestens z. Th. erst nach oder bei der Festwerdung des Eisens entstanden sein, vielleicht erst beim Zerschlagen. Letzteres wird durch die weitere Beobachtung bestätigt, daß die Lamellen auf zusammengehörigen, d. h. ursprünglich auf einanderliegenden Spaltungsflächen der Zahl und Richtung nach zuweilen verschieden sind.

Was den Verlauf der Lamellen betrifft, so sind Linck's Angaben durchaus zu bestätigen, auch darin, daß die Hauptreflexe, und namentlich auch der Schimmer, den manche Spaltflächen zeigen, von Absonderungsflächen längs den Ebenen der Lamellen also längs {112} herrühren. Indessen sind diese noch bequem meßbaren Absonderungsflächen der Lamellen nicht ihre einzigen Grenzflächen, es treten vielmehr noch andere quer zu ihrer Tafelfläche hinzu, sie sind äußerst schmal und daher früher nicht beachtet. Da sie, soweit sie parallel liegenden Lamellen angehören, ziemlich einheitlich und für symmetrisch zur Spaltfläche liegende

auch symmetrisch reflectiren, war anzunehmen, daß die Lamell
nicht von Translation sondern von einfachen Schi
bungen nach Gleitflächen herrührten, und es schien daher v
Interesse, dies durch Messung zu bestätigen und zugleich die A
der Umlagerung festzustellen, zumal solche bisher von regulär
Krystallen nicht bekannt waren.

Die durch die Schmalheit der Lamellen und Verbiegungen d
Spaltstücke erschwerten Messungen haben folgendes ergeben. D
diagonal auf der Würfelfläche verlaufenden Lamellen neig
zur Hauptfläche (001) unter 18°11′ (Mittel), und sind danach unt
der Voraussetzung, daß sie sich in Zwillingsstellung nach (11
befinden, begrenzt von (110) (dafür berechnet sich eine N
gung von $19°28^1/_2{}'$ in demselben Sinne zur Hauptfläche). Die nic
diagonal, sondern von der Würfelecke zur Mitte d
Würfelkante ziehenden Lamellen neigen zur Hauptfläc
(100), bzw. (010) unter 18°29′; ihre Grenzflächen werden dah
unter derselben Voraussetzung wie oben gebildet von $(1\bar{1}2)$ bz
von $(\bar{1}12)$ (die dafür berechnete Neigung beträgt 17°43′ in de
selben Sinne). Alle drei Beobachtungen führen übereinstimme
zu dem Schluß, daß für diese einfache Schiebung mit $k_1 = (1$
als erster Kreisschnittsebene (Gleitfläche) die Grundzone σ_2
[111] ist (oder zweite Kreisschnittsebene $k_2 = (11$
welche verlangen, daß eine Fläche $(h_1 h_2 h_3)$ nach der Umlageru
die Indices $(h_1' h_2' h_3')$ erhält, mit den Werthen:

$$h_1' = -h_1 + h_2 + h_3$$
$$h_2' = \quad h_1 - h_2 + h_3$$
$$h_3' = \quad 2(h_1 + h_2).$$

Verhältniß und Größe der Schiebung sind fast dieselben wie
Kalkspath, nämlich

$$\sigma = 1{,}4142\ldots = \sqrt{2},\ s = 0{,}7071\ldots = \sqrt{1/2}$$

Da erste und zweite Kreisschnittsebene gleic
Art sind, ein Verhältniß das bisher nur bei Anhydrit beob
ist, so sind je zwei einfache Schiebungen am E
einander reciprok, und zwar können also am
einfache Schiebungen nach nicht weniger als
solchen Flächenpaaren erfolgen[1]).

---

1) Die Structur des Eisens scheint demnach außerordentlich co
sein, um so mehr als nach den Beobachtungen von Linck (Annal.
turhist. Hofmuseums **8**, 113, 1893) und Jeremejew (Verh. d. r
Mineral. Ges. (2) **34**, 37 1896, nach d. Ref. in der Zeitschr. f. Kry
auch polysynthetische Zwillingsbildung nach {111} und {221} vork

Die Lamellen lassen sich auch durch Hämmern hervorbringen; es empfiehlt sich, da auf den Spaltflächen meist schon zahlreiche Lamellen zu sehen sind, dazu etwas angeschliffene und gut polirte Spaltstücke zu benutzen. Es wurde so festgestellt, daß die entstandenen Lamellen nach denselben Ebenen wie oben verlaufen und auch dieselben Grenzflächen aufweisen, die Umlagerung also in derselben Art erfolgt. Beim Ablöschen hellroth glühender polirter Plättchen in Wasser wurden keine Lamellen sichtbar, es ist aber zu erwarten, daß solche beim raschen Erstarren des Eisens aus Schmelzfluß entstehen, da das Eisen sich beim Erstarren ausdehnt und also die inneren Theile auf die schon erstarrten äußeren einen erheblichen Druck ausüben können.

Da weiches Eisen, wenn auch in weit geringerem Grade als die edlen Metalle, geschmeidig und dehnbar ist, war zu erwarten, daß auch Translation nachweisbar sein würde, das ist aber nicht gelungen. Die Spaltflächen merklich deformirter Stücke lassen auch an möglichst ebenen Theilen keine Translationsstreifung erkennen; da sie aber für die Erkennung sehr feiner Streifen immerhin wenig geeignet sind, wurden die Flächen von Spaltstücken polirt und diese dann deformirt. Sie verlieren dabei zwar bald ihre Politur, werden auch etwas runzelig, aber Translationsstreifung kommt nicht zum Vorschein. Da dabei die durch Politur entstandene oberflächliche Schicht störend einwirken konnte, wurden auch die verhältnißmäßig sehr ebenen und glänzenden Absonderungsflächen {112} gehämmerter Stücke untersucht, aber ebenfalls ohne Erfolg. Schließlich wurden auf der zwar unregelmäßigen aber glänzenden Oberfläche der polyedrischen Stücke nach dem Hämmern zwar sehr feine, nicht mehr reflectirende Streifen u. d. M. beobachtet, sie liefen aber den Zwillingsstreifen parallel und können also sehr feinen Zwillingslamellen entsprechen, können aber auch Translationsstreifen sein, wenn die Translation längs den Gleitflächen für einfache Schiebung, aber in entgegengesetzter Richtung (wie bei Brombaryum) erfolgt.

Antimon und Wismuth.

Es erschien von Interesse auch diese Metalle auf Translation zu untersuchen, da sie sich hinsichtlich mehrerer Eigenschaften in demselben Sinne, nur viel stärker von den edlen Metallen entfernen wie das Eisen. Sie gehen nämlich einfache Schiebungen, wie früher[1]) gezeigt wurde, viel leichter als Eisen ein, und ihre

1) O. Mügge: Neues Jahrb. f. Min. etc. 1884 II, 40 u. 1886 I, 183.

Spaltbarkeiten sind auch erheblich vollkommener, während beides bei den edlen Metallen gar nicht bekannt ist. Obwohl diese Metalle für spröde gelten, sind sie doch noch erheblich plastischer als die meisten anderen (natürlichen) Krystalle, selbst dickere Blättchen sind noch bequem zu biegen und mit einem abgerundeten Stift läßt sich leicht ein Eindruck erzieleu, ohne daß Splitter dabei entstehen. Trotzdem war auch hier von Translationsstreifung nichts zu sehen, weder auf Spaltflächen nach $\{0001\}$, $\{01\bar{1}2\}$ und $\{02\bar{2}1\}$, noch auf künstlichen Flächen, deren Politur allerdings nur schlecht gelang. Vielleicht erfolgt aber auch hier die Translation ähnlich wie bei Brombaryum und wäre dann hier, wie am Eisen, besonders schwierig nachzuweisen.

Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Februar 1899 von D. Hilbert.

Im Jahre 1770 hat Lagrange[1]) gezeigt, daß die Entwickelung einer reellen irrationalen Größe in einen gewöhnlichen Kettenbruch immer dann und nur dann periodisch ausfällt, wenn die Größe Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten ist. Dieser Satz giebt offenbar ein vollständiges Mittel zur Unterscheidung der reellen algebraischen Zahlen zweiten Grades von allen anderen Größen. Seit jener Entdeckung von Lagrange durfte man vermuthen, daß ein allgemeinerer Satz existire, der ein vollständiges Kriterium für die reellen (oder complexen) algebraischen Zahlen beliebigen n-ten Grades giebt und der für $n = 2$ und reelle Zahlen eben auf jenen Satz von Lagrange hinauskommt. Eine solche Verallgemeinerung wird zum ersten Male[2]) im Folgenden dargelegt.

§ 1. Arithmetische Hülfssätze.

1. Ich beginne mit der Ableitung einiger Hülfssätze, auf welche sich die späteren Beweisführungen gründen werden.

Es seien $\xi_1, \ldots \xi_r$ eine Reihe linearer homogener Formen mit den n reellen Variabeln $x_1, \ldots x_n$ und mit irgend welchen reellen oder complexen Coefficienten; nur soll das System der Gleichungen

---

1) Abh. der Akad. zu Berlin, Bd. XXIV, 1770; Werke, Bd. II, S. 603 u. folgende.

2) Ueber bisherige Versuche in dieser Richtung s. P. Bachmann, Vorles. über die Natur der Irrationalzahlen, 1892, Vorl. II und Vorl. X.

$\xi_1 = 0, \ldots \xi_\nu = 0$ bloß durch das eine reelle Werthsystem $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ befriedigt werden können.

Der größte unter den absoluten Beträgen von $x_1, \ldots x_n$ vorkommende Betrag soll mit $\max |x_k|$ bezeichnet werden. Setzt man für $x_1, \ldots x_n$ irgend welche reellen Werthe, so soll der größte unter den absoluten Beträgen von $\xi_1, \ldots \xi_\nu$ vorkommende Betrag mit $\max |\xi_\varkappa(x_1, \ldots x_n)|$ und zugleich mit $f(x_1, \ldots x_n)$ bezeichnet werden.

Man hat dann

1) $$f(-x_1, \ldots -x_n) = f(x_1, \ldots x_n),$$

2) $$f(tx_1, \ldots tx_n) = tf(x_1, \ldots x_n), \text{ wenn } t > 0 \text{ ist.}$$

Die Function $f(x_1, \ldots x_n)$ ist eine stetige der Argumente $x_1, \ldots x_n$ und hat daher in dem durch $\max |x_k| = 1$ definirten abgeschlossenen Bereiche (d. i. auf der Begrenzung des durch $-1 \leqq x_1 \leqq 1, \ldots -1 \leqq x_n \leqq 1$ definirten Würfels) ein bestimmtes Minimum g, das wegen der an die $\xi_1, \ldots \xi_\nu$ oben gestellten Anforderung gewiß > 0 ist, und ein bestimmtes Maximum G. Sodann ist wegen 2) stets

3) $$g \max |x_k| \leqq f(x_1, \ldots x_n) \leqq G \max |x_k|.$$

Endlich hat man, wenn $a_1, \ldots a_n$ und $b_1, \ldots b_n$ zwei reelle Systeme sind, stets

4) $$f(a_1+b_1, \ldots a_n+b_n) \leqq f(a_1, \ldots a_n)+f(b_1, \ldots b_n).$$

Denn für jede einzelne der linearen Formen $\xi_\varkappa$ gilt

$$|\xi_\varkappa(a_1+b_1, \ldots a_n+b_n)| \leqq |\xi_\varkappa(a_1, \ldots a_n)|+|\xi_\varkappa(b_1, \ldots b_n)|$$
$$\leqq \max |\xi_\varkappa(a_1, \ldots a_n)|+\max |\xi_\varkappa(b_1, \ldots b_n)|$$

und daher auch $\max |\xi_\varkappa(a_1+b_1, \ldots a_n+b_n)| \leqq \max |\xi_\varkappa(a_1, \ldots a_n)| + \max |\xi_\varkappa(b_1, \ldots b_n)|$.

Hat man $f(a_1, \ldots a_n) \leqq 1$ und $f(b_1, \ldots b_n) \leqq 1$ und ist $0 < t < 1$, so folgt nach den Regeln 4) und 2)

5) $$f((1-t)a_1+tb_1, \ldots (1-t)a_n+tb_n)) \leqq (1-t)f(a_1, \ldots a_n)+tf(b_1, \ldots b_n) \leqq 1.$$

Nach den Eigenschaften 5) und 1) ist der durch $f(x_1, \ldots x_n) \leqq 1$ definirte Bereich K in der Mannigfaltigkeit der $x_1, \ldots x_n$ ein nirgends concaver Körper und hat das System $x_1 = 0, \ldots x_n = 0$ (den Nullpunkt) als Mittelpunkt. Der Bereich K liegt wegen 3) ganz im Würfel $\max |x_k| \leqq \frac{1}{g}$ eingeschlossen und enthält in sich den Würfel $\max |x_k| \leqq \frac{1}{G}$. Das n-fache Integral

$\int dx_1 \dots dx_n$, über den Bereich K erstreckt, (das Volumen von K) hat einen bestimmten positiven endlichen Werth J.[1])

2. Der Inbegriff aller Systeme $x_1, \dots x_n$, bei welchen sowohl x_1, wie $x_2, \dots$ wie x_n ganze Zahlen sind, soll das Zahlengitter, die einzelnen Systeme daraus sollen Gitterpunkte heißen.

Eine Reihe von Systemen $x_1 = p_1^{(h)}, \dots x_n = p_n^{(h)}$ $(h = 1, \dots m$ und $m \leqq n)$ soll unabhängig heißen, wenn in der aus ihnen zu bildenden Matrix $\|p_k^{(h)}\|$ nicht jede m-reihige Determinante Null ist.

Es seien $p_1^{(h)}, \dots p_n^{(h)}$ für $h = 1, \dots n$ irgend n unabhängige Gitterpunkte, also die Substitution P:

$$6) \qquad x_k = p_k^{(1)} \varepsilon_1 + \dots + p_k^{(n)} \varepsilon_n \qquad (k = 1, \dots n)$$

eine ganzzahlige mit von Null verschiedener Determinante. Dann giebt es bekanntlich eine ganzzahlige Substitution A mit einer Determinante $= \pm 1$:

$$7) \qquad x_k = a_k^{(1)} y_1 + \dots + a_k^{(n)} y_n \qquad (k = 1, \dots n),$$

sodaß die Formeln für $P^{-1}A$ werden:

$$8) \qquad \varepsilon_1 = \gamma_1^{(1)} y_1 + \dots + \gamma_1^{(n)} y_n, \dots \varepsilon_n = \gamma_n^{(n)} y_n \quad (\gamma_h^{(k)} = 0, h > k)$$

und dabei ferner die Ungleichungen erfüllt sind:

$$9) \qquad 0 < \gamma_h^{(h)} \leqq 1, \qquad 0 \leqq \gamma_h^{(k)} < \gamma_h^{(h)} (h < k).$$

In der That, unter allen Gitterpunkten, deren Coordinaten von der Form $x_k = \gamma_1 p_k^{(1)}$ mit $0 < \gamma_1 \leqq 1$ $(k = 1, \dots n)$ sind, wird es einen geben, für den γ_1 am kleinsten ist; es sei für ihn $\gamma_1 = \gamma_1^{(1)}$, $x_k = a_k^{(1)}$. Dann kann man unter allen Gitterpunkten mit Coordinaten von der Form $x_k = \gamma_1 p_k^{(1)} + \gamma_2 p_k^{(2)}$ $(k = 1, \dots n)$ und den Umständen $0 \leqq \gamma_1 < \gamma_1^{(1)}$, $0 < \gamma_2 \leqq 1$ einen finden, für den γ_2 so klein als möglich ist; es sei für ihn $\gamma_2 = \gamma_2^{(2)}$, $\gamma_1 = \gamma_1^{(2)}$, $x_k = a_k^{(2)}$, u. s. f. Zuletzt kann man unter den Gitterpunkten mit Coordinaten von der Form $x_k = \gamma_1 p_k^{(1)} + \dots + \gamma_n p_k^{(n)}$ und $0 \leqq \gamma_1 < \gamma_1^{(1)}, \dots$ $0 \leqq \gamma_{n-1} < \gamma_{n-1}^{(n-1)}$, $0 < \gamma_n \leqq 1$ einen finden, für den γ_n möglichst klein ist; für ihn sei $\gamma_n = \gamma_n^{(n)}, \dots \gamma_1 = \gamma_1^{(n)}$, $x_k = a_k^{(n)}$.

Nunmehr wird man, wenn x_k $(k = 1, \dots n)$ ein beliebiger Gitterpunkt ist, successive $y_n, y_{n-1}, \dots y_1$ als ganze Zahlen so be-

---

1) Man kann die Zahl ν oben auch unbegrenzt wachsen lassen, wenn man die Bedingung hinzufügt, daß in allen Formen ξ_i die Beträge der Coefficienten unter einer Grenze bleiben, und kommt dadurch zu dem Begriffe eines beliebigen nirgends concaven Körpers mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Alle im § 1 abgeleiteten Sätze gelten unverändert für jeden solchen Körper.

stimmen können, daß in der Umformung

$$x_k - (y_n a_k^{(n)} + y_{n-1} a_k^{(n-1)} + \cdots + y_1 a_k^{(1)}) = \gamma_n p_k^{(n)} + \gamma_{n-1} p_k^{(n-1)} + \cdots + \gamma_1 p_k^{(1)}$$
$$(k = 1, \ldots n)$$

sich $0 \leqq \gamma_n < \gamma_n^{(n)}$, $0 \leqq \gamma_{n-1} < \gamma_{n-1}^{(n-1)}, \ldots 0 \leqq \gamma_1 < \gamma_1^{(1)}$ ergiebt. Dann muß, da die linken Seiten jedenfalls Coordinaten eines Gitterpunktes sind, nach der Bedeutung von $\gamma_n^{(n)}, \ldots \gamma_1^{(1)}$ hier nothwendig $\gamma_n = 0$, $\gamma_{n-1} = 0, \ldots \gamma_1 = 0$ sein; es folgen also die Relationen von der Form 7), woraus nach den Ausdrücken der $a_k^{(h)}$ weiter die Formeln 8) hervorgehen. Zu jedem Systeme von ganzen Zahlen $x_1, \ldots x_n$ gehören so vermöge 7) bestimmte ganzzahlige Werthe $y_1, \ldots y_n$. Es müssen also in der Auflösung von 7):

$$10) \qquad y_h = b_h^{(1)} x_1 + \cdots + b_h^{(n)} x_n \qquad (h = 1, \ldots n),$$

wie die Einführung der n Systeme $x_j = 1$, $x_k = 0$ $(k \gtrless j)$ für $j = 1, \ldots n$ zeigt, alle Coefficienten $b_h^{(j)}$ ganze Zahlen sein. Somit ist auch ihre Determinante $|b_h^{(j)}|$ eine ganze Zahl, und da dieselbe der reciproke Werth der ebenfalls ganzzahligen Determinante $|a_k^{(h)}|$ ist, so folgt nothwendig, daß diese: $|a_k^{(h)}| = \pm 1$ ist.

3. Betrachten wir wieder die in 1. definirte Function $f = f(x_1, \ldots x_n)$. Es giebt wegen 3) nur eine endliche Anzahl von Gitterpunkten, für welche f eine gegebene Größe nicht überschreitet. Andererseits gilt nach 3) $f \leqq G$ jedenfalls bei den n unabhängigen Systemen $x_j = 1$, $x_k = 0$ $(k \gtrless j)$ für $j = 1, \ldots n$. Man bestimme nun unter allen vom Nullpunkte verschiedenen Gitterpunkten, bei welchen $f \leqq G$ ist, einen ersten Gitterpunkt $p_1^{(1)}, \ldots p_n^{(1)}$, so daß $f(p_1^{(1)}, \ldots p_n^{(1)}) = F_1$ möglichst klein ist, sodann einen zweiten, von diesem ersten unabhängigen Gitterpunkt $p_1^{(2)}, \ldots p_n^{(2)}$, so daß $f(p_1^{(2)}, \ldots p_n^{(2)}) = F_2$ möglichst klein ist, u. s. f. bis zu einem n-ten Gitterpunkt $p_1^{(n)}, \ldots p_n^{(n)}$, so daß schließlich die Determinante $|p_k^{(h)}| \gtrless 0$ ist und für diesen letzten $f(p_1^{(n)}, \ldots p_n^{(n)}) = F_n$ möglichst klein ausfällt. Bei jedem einzelnen der zu wählenden Gitterpunkte hat man jedenfalls die Auswahl zwischen einem Paare entgegengesetzter Systeme ($p_1, \ldots p_n$ und $-p_1, \ldots -p_n$), unter Umständen aber zwischen einer gewissen Anzahl solcher Paare; trotz der dabei zugelassenen Willkühr aber ist das System der n Werthe $F_1, F_2, \ldots F_n$ von vorn herein ein völlig bestimmtes.

In der That, jedenfalls ist

$$11) \qquad F_1 \leqq F_2 \leqq \ldots \leqq F_n$$

Wir denken uns nun für die n Gitterpunkte $p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}$ $(h = 1, \ldots n)$,

an welche die Betrachtungen in 2. anknüpften, die hier ausgewählten n Gitterpunkte gesetzt und können alsdann sämmtliche dort eingeführten Bezeichnungen hier übernehmen. Vermöge der Substitution A entsprechen sich genau die Gitterpunkte $x_1, \ldots x_n$ und die ganzzahligen Systeme $y_1, \ldots y_n$. Nach der Bedeutung der Werthe F_j hat man für einen Gitterpunkt, bei dem $z_j, z_{j+1}, \ldots z_n$ nicht sämmtlich Null sind oder also $y_j, y_{j+1}, \ldots y_n$ nicht sämmtlich Null sind, stets $f(x_1, \ldots x_n) \geqq F_j$. Hat man nun irgend n unabhängige Gitterpunkte $x_1^{(h)}, \ldots x_n^{(h)}$ für $h = 1, \ldots n$, so daß also die Determinante $|x_k^{(h)}| \neq 0$ ist, und entsprechen ihnen vermöge der Substitution 7) die Systeme $y_1^{(h)}, \ldots y_n^{(h)}$, so ist auch die Determinante $|y_k^{(h)}| \neq 0$; es können daher, wenn j einen der Werthe $1, \ldots n$ bedeutet, nicht bei j oder gar mehr der Punkte alle $n-j+1$ Größen $y_j, y_{j+1}, \ldots y_n$ gleich Null sein, es sind also stets für mindestens $n-j+1$ der Punkte die Werthe $f(x_1, \ldots x_n) \geqq F_j$. Ordnet man also die n Werthe $f(x_1^{(h)}, \ldots x_n^{(h)})$ der Größe nach in die Reihe $F_1^*, \ldots F_n^*$, so ist stets $F_j^* \geqq F_j$ $(j = 1, \ldots n)$, [also auch $\prod_h^{1,n} f(x_1^{(h)}, \ldots x_n^{(h)}) \geqq F_1 \ldots F_n$, wobei das Gleichheitszeichen nur statthat, wenn die n Werthe $f(x_1^{(h)}, \ldots x_n^{(h)})$ abgesehen von der Reihenfolge mit $F_1, \ldots F_n$ zusammenfallen]. Danach sind die Werthe $F_1, \ldots F_n$ vollkommen bestimmt als das kleinste mögliche System von n Werthen der Function $f(x_1, \ldots x_n)$ für n unabhängige Gitterpunkte.

In dem fünften Kapitel meines Buches „Geometrie der Zahlen“ (I. Heft, Leipzig, 1896) nun habe ich nachgewiesen, daß stets die Ungleichung

$$F_1 \ldots F_n J \leqq 2^n$$

gilt, wo J das Volumen des Bereichs $f(x_1, \ldots x_n) \leqq 1$ ist. Der Beweis dieser Ungleichung erfordert mancherlei Ausführungen. Für die im Folgenden beabsichtigten Folgerungen kommt es jedoch nur darauf an, daß sich für $F_1 \ldots F_n J$ überhaupt irgend eine, nur von n und nicht weiter von der Function $f(x_1, \ldots x_n)$ abhängende obere Grenze angeben läßt. Durch wesentlich einfachere Ueberlegungen als a. a. O. läßt sich nun Folgendes nachweisen.

Hülfssatz I. Es gilt für den nirgends concaven Bereich $f(x_1, \ldots x_n) \leqq 1$ die Ungleichung:

$$F_1 \ldots F_n J \leqq n! 2^n. \tag{12}$$

4. Um den Beweis dieser Ungleichung anzubahnen, ermitteln wir zunächst zu den einmal gewählten n Gitterpunkten $p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}$

für $h = 1, \ldots n$ die Substitution 7) und führen damit gewisse neue Variabeln $y_1, \ldots y_n$ ein. Es sei K der Körper $f(x_1, \ldots x_n) \leqq 1$, und wir wollen für $j = 1, \ldots n$ unter K_j^+ bez. K_j^- das Gebiet aus K verstehen, für das $y_j \geqq 0$, bez. $y_j \leqq 0$ und zudem, (wenn $j < n$ ist), $y_{j+1} = 0, \ldots y_n = 0$ ist; die Vereinigung von K_j^+ und K_j^- heiße K_j; der Bereich K_n wird nichts anderes als K selbst.

Es sei $y_1 = \delta_1^{(1)}$, $y_2 = 0, \ldots y_n = 0$ der Punkt (das System $y_1, \ldots y_n$) aus K_1^+, für den y_1 am größten ist, sodann $y_1 = \delta_1^{(2)}$, $y_2 = \delta_2^{(2)}$, $y_3 = 0, \ldots y_n = 0$ ein solcher Punkt aus K_2^+, für den y_2 möglichst groß ist, u. s. f., schließlich $y_1 = \delta_1^{(n)}$, $y_2 = \delta_2^{(n)}, \ldots$ $y_n = \delta_n^{(n)}$ ein solcher Punkt aus K_n^+, für den y_n möglichst groß ist. Dabei sind natürlich $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(2)}, \ldots \delta_n^{(n)}$ positiv. Diese Systeme mögen auch kurz die Punkte $\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2, \ldots \mathfrak{d}_n$ und die ihnen entgegengesetzten Systeme die Punkte $-\mathfrak{d}_1, -\mathfrak{d}_2, \ldots -\mathfrak{d}_n$ heißen.

Wir führen nun die Substitution ein:

$$13) \qquad y_1 = \delta_1^{(1)} v_1 + \cdots + \delta_1^{(n)} v_n, \ldots y_n = \delta_n^{(n)} v_n \quad (\delta_h^{(k)} = 0,\ h > k),$$

und wir setzen ihre Determinante $\delta_1^{(1)} \delta_2^{(2)} \ldots \delta_n^{(n)} = \Delta$. Für den Punkt $\mathfrak{d}_j$ hat man dann $v_j = 1$, $v_k = 0$ $(k \gtrless j)$; als ein Körper, der den Nullpunkt zum Mittelpunkt hat, enthält K mit $\mathfrak{d}_j$ jedesmal auch den Punkt $-\mathfrak{d}_j$, d. i. $v_j = -1$, $v_k = 0$ $(k \gtrless j)$, und mit diesen $2n$ Systemen $\pm\mathfrak{d}_1, \ldots \pm\mathfrak{d}_n$ enthält K als ein nirgends concaver Körper (wegen 5)) sogleich den ganzen durch

$$14) \qquad |v_1| + |v_2| + \cdots + |v_n| \leqq 1$$

definirten Bereich (für $n = 3$ stellt dieser Bereich ein Oktaeder vor).

Es läßt sich nun ein zweiter einfacher Bereich (ein Parallelepipedum) angeben, welcher seinerseits ganz den Körper K in sich enthält. Es habe j einen der Werthe $1, \ldots n-1$. Wir suchen einen Ausdruck $\varphi = v_j + \varepsilon^{(j+1)} v_{j+1} + \cdots + \varepsilon^{(n)} v_n$ mit geeigneten Constanten $\varepsilon^{(j+1)}, \ldots \varepsilon^{(n)}$ herzustellen, sodaß in K durchweg $\varphi \leqq 1$ ist.

Zunächst gilt in K_j: $v_j \leqq 1$. Wir bilden nun $\varphi = v_j + \varepsilon v_{j+1}$ mit irgend einer Constante ε. In K_j ist $v_{j+1} = 0$, $v_j \leqq 1$, also $\varphi \leqq 1$. Sowie $\varepsilon \leqq -1$ ist, hat man für den Punkt $-\mathfrak{d}_{j+1}$, für den $v_{j+1} = -1$, $v_j = 0$ ist, $\varphi \geqq 1$; dann muß in K_{j+1}^+ durchweg $\varphi \leqq 1$ sein. Denn hätte man $\varphi > 1$ für irgend einen Punkt in K_{j+1}^+, so würde die Strecke von diesem Punkte nach $-\mathfrak{d}_{j+1}$ das Gebiet K_j in einem Punkte treffen, für den ebenfalls $\varphi > 1$ wäre. Sowie andererseits $\varepsilon > 1$ ist, hat man in K_{j+1}^+ für den Punkt $\mathfrak{d}_{j+1}$ jedenfalls $\varphi > 1$. Danach ist das Maximum des Ausdrucks

$\varphi = v_j + \varepsilon v_{j+1}$ für ein gegebenes ε im Bereiche K^+_{j+1} sicher > 1, wenn $\varepsilon > 1$ ist, und sicher $\leqq 1$, wenn $\varepsilon \leqq -1$ ist. Dieses Maximum aber ist offenbar eine Function von ε, die sich mit ε stetig ändert, und wird es daher einen bestimmten größten Werth $\varepsilon = \varepsilon_j^{(j+1)}$ geben, im Intervalle $-1 \leqq \varepsilon \leqq 1$ gelegen, für den dieses Maximum noch $\leqq 1$, d. h. für den in K^+_{j+1} noch durchweg $\varphi \leqq 1$ ist. Dann ist für jeden Werth ε, der $> \varepsilon_j^{(j+1)}$ ist, in K^+_{j+1} nothwendig irgendwo auch $\varphi > 1$ und daher, weil in K_j überall $\varphi \leqq 1$ sein muß, in K^-_{j+1} nothwendig überall $\varphi \leqq 1$; letzteres muß dann auch noch für den Grenzwerth $\varepsilon = \varepsilon_j^{(j+1)}$ gelten, und also ist für diesen Werth im ganzen Bereich K_{j+1} stets $\varphi \leqq 1$.

Falls auch noch $j+1 < n$ ist, betrachten wir weiter den neuen Ausdruck $\varphi = v_j + \varepsilon_j^{(j+1)} v_{j+1} + \varepsilon v_{j+2}$ mit irgend einer Constante ε. In K_{j+1} ist $v_{j+2} = 0$ und also stets $\varphi \leqq 1$. Für ein $\varepsilon \leqq -1$ und den Punkt $-\mathfrak{d}_{j+2}$ in K^-_{j+2} ist $\varphi \geqq 1$ und daher in K^+_{j+2} nothwendig überall $\varphi \leqq 1$. Dagegen ist für ein $\varepsilon > 1$ in K^+_{j+2} insbesondere $\varphi > 1$ für den Punkt $\mathfrak{d}_{j+2}$. Nunmehr wird es einen bestimmten größten Werth $\varepsilon = \varepsilon_j^{(j+2)}$ geben, im Intervalle $-1 \leqq \varepsilon \leqq 1$ gelegen, für den in K^+_{j+2} noch überall $\varphi \leqq 1$ ist. Dann ist für jeden Werth $\varepsilon > \varepsilon_j^{(j+2)}$ in K^+_{j+2} irgendwo $\varphi > 1$ und daher in K^-_{j+2} überall $\varphi \leqq 1$, und dieses letztere muß schließlich auch für den Grenzwerth $\varepsilon = \varepsilon_j^{(j+2)}$ gelten. Mithin ist $\varphi = v_j + \varepsilon_j^{(j+1)} v_{j+1} + \varepsilon_j^{(j+2)} v_{j+2}$ in K_{j+2} durchweg $\leqq 1$.

Es ist nun klar, wie man fortzuschreiten hat, wenn noch $j+2 < n$ ist, und daß man schließlich zu einem Ausdrucke

$$\varphi_j = v_j + \varepsilon_j^{(j+1)} v_{j+1} + \cdots + \varepsilon_j^{(n)} v_n$$

mit bestimmten Coefficienten $\varepsilon_j^{(j+1)}, \ldots \varepsilon_j^{(n)}$ kommen wird von solcher Art, daß in K_n, d. i. in K überall $\varphi_j \leqq 1$ ist. Weil K ein Körper mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist, nimmt $-\varphi_j$ in K dieselbe Werthmenge an wie φ_j, und also ist dann in K auch $-\varphi_j \leqq 1$, d. h. $\varphi_j \geqq -1$.

Endlich hat man noch für $\varphi_n = v_n$ in K stets $\pm \varphi_n \leqq 1$.

Man kann auf solche Weise n Formen herstellen:

$$15) \quad \varphi_1 = v_1 + \varepsilon_1^{(2)} v_2 + \cdots + \varepsilon_1^{(n)} v_n, \quad \varphi_2 = v_2 + \cdots + \varepsilon_2^{(n)} v_n, \ldots \varphi_n = v_n,$$

sodaß K ganz in dem Bereiche

$$16) \qquad -1 \leqq \varphi_1 \leqq 1, \quad -1 \leqq \varphi_2 \leqq 1, \ldots -1 \leqq \varphi_n \leqq 1$$

enthalten ist.

Nun ist über diesen Bereich ausgedehnt das Integral $\int dx_1 \ldots dx_n = \int dy_1 \ldots dy_n = \Delta . \int dv_1 \ldots dv_n = \Delta . \int d\varphi_1 \ldots d\varphi_n = 2^n \Delta$, wo Δ

die Determinante der Gleichungen 13) bedeutet, und also folgt, weil K in diesem Bereiche enthalten ist:

17) $$J \leqq 2^n \Delta.$$

Andererseits ist für den Bereich 14) das Volumen $\int dx_1 \dots dx_n = \Delta . \int dv_1 \dots dv_n = \frac{2^n}{n!} \Delta$ und hat man, weil dieser Bereich 14) ganz in K enthalten ist,

18) $$\frac{2^n}{n!} \Delta \leqq J.$$

5. Weil der Bereich 14) in K enthalten ist, hat man auf der Begrenzung von K, d. h. wenn $f(x_1, \dots x_n) = 1$ ist, $|v_1| + \dots + |v_n| \leq 1 = f(x_1, \dots x_n)$. Wegen 2) und der entsprechenden Regel für den Ausdruck $|v_1| + \dots + |v_n|$ gilt dann allgemein für jedes beliebige System $x_1, \dots x_n$:

19) $$|v_1 + \dots + v_n| \geqq f(x_1, \dots x_n).$$

Wir bilden für ein beliebiges System $x_1, \dots x_n$ unter Benutzung der Substitutionen 7) und 13) den Ausdruck

20) $$\left| \frac{v_1}{F_1} + \dots + \frac{v_n}{F_n} \right| = \psi(x_1, \dots x_n).$$

Ist $x_1, \dots x_n$ ein vom Nullpunkte verschiedener Gitterpunkt und für ihn unter seinen Zahlen $y_1, \dots y_n$ etwa y_j die letzte von Null verschiedene, so ist nach der Bedeutung der Werthe $F_1, \dots F_n$ für ihn $f(x_1, \dots x_n) \geqq F_j$; alsdann folgt aus 15), indem, wenn $j < n$ ist, für ihn $v_{j+1}, \dots v_n$ Null sind, $v_1 + \dots + v_j \leq F_j$ und mit Rücksicht auf 11) weiter

$$\psi(x_1, \dots x_n) = \frac{v_1}{F_1} + \dots + \frac{v_j}{F_j} \leq \frac{v_1}{F_1} + \dots + \frac{v_j}{F_j} \leq 1.$$

Danach kann sich für keinen einzigen Gitterpunkt außer dem Nullpunkte $\psi(x_1, \dots x_n) > 1$ herausstellen. Der durch

21) $$\psi(x_1, \dots x_n) \leq 1$$

definirte nirgends concave Bereich für $n = 2$ ein Sechseck, enthält also außer dem Nullpunkte keinen Gitterpunkt im Innern (d. h. die Begrenzung ausgenommen). Das Integral $\int du_1 \dots du_n$ über diesen Bereich ist $= F_1 \dots F_n \frac{2^n \Delta}{n!}$.

Sind $x_1 = 2r_1, \dots x_n = 2r_n$ und $x_1 = 2s_1, \dots x_n = 2s_n$ irgend zwei verschiedene Systeme von je n geraden ganzen Zahlen, so können daher die zwei ihnen entsprechenden Bereiche

$$\psi(x_1 - 2r_1, \dots x_n - 2r_n) \leqq 1, \qquad \psi(x_1 - 2s_1, \dots x_n - 2s_n) \leqq 1$$

niemals einen inneren Punkt gemein haben. Denn da man analog zu 4) und 1)

$$2\psi(s_1 - r_1, \dots s_n - r_n) \leqq \psi(x_1 - 2r_1, \dots x_n - 2r_n) + \psi(2s_1 - x_1, \dots 2s_n - x_n)$$
$$\psi(2s_1 - x_1, \dots 2s_n - x_n) = \psi(x_1 - 2s_1, \dots x_n - 2s_n)$$

hat, würde in solchem Falle $2\psi(s_1 - r_1, \dots s_n - r_n) < 2$ hervorgehen, läge also der vom Nullpunkte verschiedene Gitterpunkt $s_1 - r_1, \dots s_n - r_n$ im Inneren des Bereiches 21).

Man hat im Bereiche 21) stets $|v_j| \leqq F_j \leqq G$, sodann, wenn δ den größten Betrag unter den Beträgen der $\delta_k^{(j)}$ in 13) ist, $|y_k| \leqq n\delta G$, und wenn a den größten Betrag unter den Beträgen der $a_k^{(h)}$ in 7) ist, weiter $|x_k| \leqq n^2 a\delta G$, welche Grenze d heiße. In $\psi(x_1 - 2r_1, \dots x_n - 2r_n) \leqq 1$ gilt dann, wenn r der größte Betrag unter denen von $r_1, \dots r_n$ ist, $|x_k - 2r_k| \leqq d$, $|x_k| \leqq 2r + d$.

Nun sei $\mathfrak{Q}$ irgend eine positive ganze Zahl und man betrachte alle diejenigen Gitterpunkte mit geraden Coordinaten $2r_1, \dots 2r_n$, für welche jede der Grössen r_k einen der Werthe $0, \pm 1, \dots \pm \mathfrak{Q}$ hat. Von den zugehörigen Bereichen $\psi(x_1 - 2r_1, \dots x_n - 2r_n) \leqq 1$ haben keine zwei einen inneren Punkt gemein. Sie liegen alle im Würfel

$$-(2\mathfrak{Q} + d) \leqq x_k \leqq (2\mathfrak{Q} + d) \qquad (k = 1, \dots n)$$

eingeschlossen. Die Anzahl dieser Bereiche ist $(2\mathfrak{Q}+1)^n$ und jeder hat dasselbe Volumen wie der Bereich 21). Danach folgt

$$22) \qquad (2\mathfrak{Q}+1)^n . F_1 \dots F_n \frac{2^n}{n!} \Delta \leqq (4\mathfrak{Q} + 2d)^n .$$

Läßt man hierin die ganze Zahl $\mathfrak{Q}$ unbegrenzt wachsen, so geht

$$23) \qquad F_1 \dots F_n \frac{2^n}{n!} \Delta \leqq 2^n$$

hervor, d. h. das Volumen des Bereichs 21) muß $\leqq 2^n$ sein. Vermittelst 17) folgt daraus in der That der zu erweisende Hülfssatz I.

6. Ferner ist von Interesse:

Hülfssatz II. Die Determinante $|p_k^{(h)}|$ für n unabhängige Gitterpunkte $p_1^{(h)}, \dots p_n^{(h)}$ $(h = 1, \dots n)$, welche $f(p_1^{(h)}, \dots p_n^{(h)}) = F_h$ ergeben, ist stets dem Betrage nach $\leqq n!$

Nämlich auch der durch

$$24) \qquad |\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_n| \leqq 1$$

definirte Bereich enthält keinen Gitterpunkt außer dem Nullpunkte im Inneren. Denn ist $x_1, \ldots x_n$ ein vom Nullpunkte verschiedener Punkt im Inneren dieses Bereichs und von den Größen $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ für ihn ε_j die letzte von Null verschiedene, so folgt aus 6) vermöge 4), 1), 2)

$$f(x_1, \ldots x_n) \leqq |\varepsilon_1| f(p_1^{(1)}, \ldots p_n^{(1)}) + \cdots + |\varepsilon_j| f(p_1^{(j)}, \ldots p_n^{(j)})$$
$$\leqq (|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_j|) F_j < F_j;$$

nun ist auch unter den Grössen $y_1, \ldots y_n$ für ihn y_j die letzte von Null verschiedene und kann hiernach der Punkt kein Gitterpunkt sein. Auf Grund derselben Ueberlegungen wie vorhin für den analogen Bereich 21) folgt nunmehr, daß auch das Volumen von 24) sicher $\leqq 2^n$ ist. Dieses Volumen ist gleich $\frac{2^n}{n!}$, multiplicirt in den Betrag der Determinante $|p_k^{(h)}|$; mithin ist dieser Betrag $\leqq n!$

Das gleiche Resultat ergiebt sich bereits in folgender Weise. Der Betrag der Determinante $|p_k^{(h)}|$ ist nach 6), 7), 8) gleich dem reciproken Werth des Productes $\gamma_1^{(1)} \ldots \gamma_n^{(n)}$. Für den Gitterpunkt $p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}$ ist $\varepsilon_h = 1$, $\varepsilon_k = 0$ $(k \gtrless h)$, also $y_h = \frac{1}{\gamma_h^{(h)}}$, $y_k = 0$ $(k > h)$. Da nun dieser Punkt zum Bereiche $f\left(\frac{x_1}{F_h}, \cdots \frac{x_n}{F_h}\right) \leqq 1$ gehört, muß für ihn nach der Bedeutung der Größen $\delta_h^{(h)}$ in 4. sich $\frac{y_h}{F_h} \leqq \delta_h^{(h)}$ erweisen. Also ist $\frac{1}{\gamma_h^{(h)}} \leqq F_h \delta_h^{(h)}$, mithin $\frac{1}{\gamma_1^{(1)} \cdots \gamma_n^{(n)}} \leqq F_1 \ldots F_n \Delta$, woraus vermöge 23) der Hülfssatz II hervorgeht.

Nach 6), 7), 8) sind die Coefficienten $\gamma_k^{(h)}$ in 8) rationale Zahlen mit der Determinante $|p_k^{(h)}|$ als Nenner, also mit einem Generalnenner $\leqq n!$ Nach den Ungleichungen 9) kommen daher für diese Coefficienten, also für die ganze Substitution $P^{-1}A$ von vorn herein eine nur von n abhängende Anzahl von möglichen Ausdrücken in Betracht.

7. Endlich fügen wir die folgende Bemerkung hinzu. Für das System $x_k = a_k^{(h)}$ $(k = 1, \ldots n)$ in 7) ist $x_k = \gamma_1^{(h)} p_k^{(1)} + \cdots + \gamma_h^{(h)} p_k^{(h)}$. Indem nun die Größen $\gamma_1^{(h)}, \ldots \gamma_h^{(h)}$ sämmtlich $\geqq 0$ und $\leqq 1$ sind, folgt aus 4) und 2):

$$f(a_1^{(h)}, \ldots a_n^{(h)}) \leqq f(p_1^{(1)}, \ldots p_n^{(1)}) + \cdots + f(p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}) \leqq h F_h.$$

Berücksichtigt man nun 12), so zeigt sich, daß für die n ganzzahligen Systeme $a_1^{(h)}, \dots a_n^{(h)}$ $(h = 1, \dots n)$, deren Determinante $|a_k^{(h)}| = \pm 1$ ist, die Ungleichung

$$25) \qquad f(a_1^{(1)}, \dots a_n^{(1)}) \dots f(a_1^{(n)}, \dots a_n^{(n)}) \leqq (n!)^2 2^n \frac{1}{J}$$

erfüllt ist.

§ 2. Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen n^{ten} Grades.

8. Eine reelle oder complexe Größe a heißt eine algebraische Zahl und zwar n^{ten} Grades, wenn sie einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades

$$x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1} + x_{n+1} a^n = 0 \qquad (x_{n+1} \neq 0)$$

mit rationalen ganzzahligen Coefficienten $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}$, deren letzter $\neq 0$ ist, und nicht bereits einer Gleichung derselben Art von niedrigerem Grade genügt. Dieses ist die Definition der algebraischen Zahlen n^{ten} Grades. Im Folgenden will ich nun ein Theorem entwickeln, wonach die Entscheidung, ob eine gegebene reelle oder complexe Größe a eine algebraische Zahl n^{ten} Grades ist oder nicht, bereits durch Betrachtung der Werthe des Ausdrucks

$$26) \qquad \xi = x_1 + x_2 a + \dots + x_n a^{n-1}$$

für rationale ganze Zahlen $x_1, x_2, \dots x_n$ geliefert werden kann.

Es sei r irgend eine positive ganze Zahl, und wir lassen für $x_1, \dots x_n$ in 26) alle diejenigen Systeme von ganzen Zahlen zu, wobei jede Zahl dem Betrage nach $\leqq r$ ist, also der Reihe $0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm r$ angehört, mit Ausschluß des einen Systems $x_1 = 0, \dots x_n = 0$. Unter den betreffenden Systemen kommen gewiß Vereine von n unabhängigen (d. h. mit nicht verschwindender Determinante $|x_k^{(h)}|$) vor; z. B. sind die n Systeme $x_h^{(h)} = 1$, $x_k^{(h)} = 0$ $(k \gtrless h)$ für $h = 1, \dots n$ unabhängig. Wir suchen unter allen jenen Systemen ein erstes $x_1 = p_1^{(1)}, \dots x_n = p_n^{(1)}$ aus, so daß der Betrag von ξ möglichst klein ausfällt. Da wir dabei jedenfalls die Wahl zwischen Paaren entgegengesetzter Systeme haben, wollen wir das System noch derart voraussetzen, daß die letzte von Null verschiedene der Zahlen $p_k^{(1)}$ größer als Null ist. Es sei für das System $\xi = \alpha_1$. Sodann wählen wir unter jenen Systemen ein zweites, von $p_1^{(1)}, \dots p_n^{(1)}$ unabhängiges System $x_1 = p_1^{(2)}, \dots x_n = p_n^{(2)}$ aus, wofür nächstdem der Betrag von ξ möglichst klein ausfällt, und es sei

wieder unter den Zahlen $p_k^{(2)}$ die letzte nicht verschwindende > 0. Für dieses zweite System sei $\xi = \alpha_2$. Wir fahren so fort, bis wir schließlich unter jenen Systemen ein n^{ten} von den früheren unabhängiges System $x_1 = p_1^{(n)}, \ldots x_n = p_n^{(n)}$ erlangen, wofür wieder der Betrag von ξ möglichst klein ist, und es sei auch von den Zahlen $p_k^{(n)}$ die letzte von Null verschiedene > 0. Für dieses n^{te} System sei $\xi = \alpha_n$. Dann hat endlich die Substitution P:

$$27) \qquad x_k = p_k^{(1)} z_1 + p_k^{(2)} z_2 + \cdots + p_k^{(n)} z_n \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

eine von Null verschiedene Determinante, und es geht ξ durch P in

$$28) \qquad \xi P = \chi = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n$$

über. Dabei ist jedenfalls

$$29) \qquad |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \ldots \leqq |\alpha_n|.$$

Unter speciellen Umständen in Bezug auf die Größe a ist es möglich, daß die Systeme $p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}$ durch die angegebenen Bedingungen noch nicht eindeutig bestimmt sind, die Festsetzung von P für das gegebene r also noch in mehrfacher Weise geschehen kann. Durch entsprechende Betrachtungen wie in 3. aber erkennt man, daß jedenfalls das System der n absoluten Beträge $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots |\alpha_n|$ durch die Zahl r völlig eindeutig bestimmt ist. Es heiße P eine zur Zahl r gehörende Substitution.

Man bilde nun eine zur Zahl $r_1 = 1$ gehörende Substitution P_1. Diese kann auch noch zu $r = 2, 3, \ldots$ gehören. Gehört sie nicht zu jeder Zahl r, so sei der größte Werth r, zu dem sie gehört, $r = r_2 - 1$, (wo $r_2 \geqq 2$ ist). Es sei sodann P_2 eine zu r_2 gehörende Substitution, und sie gehöre zu den Zahlen r, die $\geqq r_2$ und $< r_2$ sind. Sodann sei P_3 eine zu r_3 gehörende Substitution u. s. f. Wir wollen noch die Festsetzung treffen, daß, wenn für eine dieser Substitutionen P_ι in der zugehörigen Form $\xi P_\iota = \chi$ ein Theil der Coefficienten $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ (etwa $\alpha_1, \ldots \alpha_j$) $= 0$ wird, die betreffenden Verticalreihen $p_1^{(h)}, \ldots p_n^{(h)}$ $(h = 1, \ldots j)$ für alle folgenden Substitutionen $P_\varkappa$ $(\varkappa > \iota)$ unverändert beibehalten werden sollen. Die so entstehende (sei es abbrechende, sei es unendliche) Reihe von Substitutionen $P_1, P_2, P_3, \ldots$ soll die zu a gehörende Kette von Substitutionen heißen.

Es sei allgemein $\chi_\iota = \alpha_1^{(\iota)} z_1 + \cdots + \alpha_n^{(\iota)} z_n$ die Form, in welche ξ durch P_ι übergeht. Man hat für zwei aufeinanderfolgende Substitutionen $P_\iota, P_{\iota+1}$ der Kette:

$$30) \qquad |\alpha_1^{(\iota+1)}| \leqq |\alpha_1^{(\iota)}|, \ldots \; |\alpha_n^{(\iota+1)}| \leqq |\alpha_n^{(\iota)}| \qquad (\iota = 1, 2, \ldots),$$

wo jedenfalls nicht alle n Gleichheitszeichen auf einmal gelten können; denn sonst würde ja P_t auch zur Zahl r_{t+1} gehören, während sie nur zu den Werthen $r \geqq r_t$ und $\leqq r_{t+1}-1$ gehört. In P_t sind jedesmal die Beträge aller Coefficienten $\leqq r_t$ und ist wenigstens einer darunter $> r_t-1$, also eben $= r_t$. Man erkennt nach diesen Umständen, daß die Reihe der Zahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ eine durch die Größe a völlig bestimmte ist.

9. Ohne an die Aufgabe der einfachsten successiven Ermittlung der Kettenglieder näher heranzutreten, beweise ich nur den folgenden Satz, der bei der Behandlung dieser Aufgabe die wesentlichsten Dienste leistet.

Für eine jede Substitution der Kette ist die Determinante dem Betrage nach $\leqq n!$

Es sei P in 27) eine Substitution der Kette, zu einer Zahl r gehörend, und χ in 28) die Form, in welche ξ durch P übergeht. Dann kann der durch

$$31) \qquad |\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_n| \leqq 1$$

definirte Bereich im Inneren (d. h. soweit das Zeichen $<$ gilt), keinen Gitterpunkt außer dem Nullpunkte enthalten. Denn ist $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ irgend ein, von $0, \ldots 0$ verschiedenes System im Inneren dieses Bereichs 31) und von diesen Größen ε_j die letzte von Null verschiedene, so hat man dafür

$$\xi = \alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_j \varepsilon_j, \quad x_k = p_k^{(1)} \varepsilon_1 + \cdots + p_k^{(j)} \varepsilon_j.$$

Ist erstens $|\alpha_j| > 0$, so folgt $|\xi| \leqq |\alpha_j|(|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_j| < |\alpha_j|$, $|x_k| \leqq r(|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_j|) < r$; alsdann ist das betreffende System $x_1, \ldots x_n$ kein Gitterpunkt, denn für einen Gitterpunkt, bei dem die Beträge $|x_k| \leqq r$ sind und $\varepsilon_j \neq 0$ ist, muß $|\xi| \geqq |\alpha_j|$ sein.

Ist zweitens $\alpha_j = 0$, so sei $P_\varkappa$ die erste Substitution der Kette, für welche sich $\alpha_1^{(\varkappa)} = \cdots = \alpha_j^{(\varkappa)} = 0$ findet, während, wenn $\varkappa > 1$ ist, in der zu $P_{\varkappa-1}$ gehörenden Form $\chi_{\varkappa-1}$ der erste nicht verschwindende Coefficient $\alpha_{j'}^{(\varkappa-1)}$ mit einem Index $j' \leqq j$ sei. Dann ist also $r_\varkappa$ die kleinste Zahl, für welche die ersten j' Verticalreihen einer zugehörigen Substitution sämmtlich $\xi = 0$ machen. Nun gehören zufolge einer in 8. getroffenen Festsetzung die ersten j Verticalreihen von P bereits zu $P_\varkappa$ und, wenn $\varkappa > 1$ und $j' > 1$ ist, die ersten $j'-1$ Verticalreihen von P bereits zu $P_{\varkappa-1}$. Für das System $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ folgt jetzt $\xi = 0$, $|x_k| \leqq r_\varkappa(|\varepsilon_1| + \cdots + |\varepsilon_j|) < r_\varkappa$. Im Falle $\varkappa = 1$ ist $r_1 = 1$ und kann also $x_1, \ldots x_n$ hier kein Gitterpunkt sein. Ist aber $\varkappa > 1$ und wäre $x_1, \ldots x_n$ hier ein Gitterpunkt, so wäre derselbe, da $\varepsilon_j \neq 0$ ist, ja vom Nullpunkte verschieden und zudem, falls $j' > 1$ ist, auch von den

Gitterpunkten in den ersten $j'-1$ Verticalreihen von $P_{\varkappa-1}$ unabhängig; also würde bereits zu einer gewissen Zahl $< r_\varkappa$ eine Substitution gehören müssen, in welcher mindestens j' Verticalreihen sämmtlich $\xi = 0$ machen.

Aus dem Umstande, daß 31) keinen Gitterpunkt im Inneren enthält, folgt wie im ersten Beweise des Hülfssatzes II (s. 6.), daß die Determinante $|p_t^{(\lambda)}|$ von P dem Betrage nach $\leqq n!$ ist.

10. Es sei $n > 1$. Ferner wollen wir von dem Falle absehen, daß $n = 2$ und a complex ist; alsdann würde $|\xi| = |x_1 + ax_2|$ unter einer gegebenen Grenze nur für eine endliche Anzahl von ganzzahligen Systemen x_1, x_2 liegen, wäre also die Substitutionenkette zu a jedenfalls eine abbrechende; andererseits ist eine complexe Größe $a = b + ic$ dann und nur dann eine algebraische Zahl zweiten Grades, wenn b sowie c^2 rational sind.

Auf Grund der in 8. entwickelten Begriffe entsteht nun folgendes vollständige

Kriterium für die algebraischen Zahlen n^{ten} Grades:

Es sei a eine beliebige reelle oder complexe Größe, im ersten Falle $\sigma = 1$, im zweiten $\sigma = 2$ und $n > \sigma$. Es sei

$$\xi = x_1 + ax_2 + \cdots + a^{n-1}x_n,$$

sodann $P_1, P_2, P_3, \ldots$ die zu a gehörige Kette von Substitutionen mit n Variabeln und $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \ldots$ seien die Formen, in welche ξ durch $P_1, P_2, P_3, \ldots$ übergeht.

1° Ist a nicht eine algebraische Zahl n^{ten} oder niederen Grades, so bricht die Kette niemals ab und alle Gleichungen $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0, \ldots$ sind verschieden, (d. h. keine zwei der Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ unterscheiden sich bloß durch einen Factor). In jeder Form $\chi_\varkappa$ sind alle Coefficienten von Null verschieden.

2° Ist a eine algebraische Zahl n^{ten} Grades, so bricht die Kette niemals ab, unter den Gleichungen $\chi_1 = 0$. $\chi_2 = 0, \ldots$ kommen nur eine **endliche** Anzahl verschiedener vor, (d. h. alle diese unendlich vielen Formen entstehen aus einer endlichen Anzahl unter ihnen durch Multiplication mit Factoren), in jeder Form $\chi_\varkappa$ sind alle Coefficienten von Null verschieden.

3° Ist a eine algebraische Zahl $n-m^{ten}$ Grades, wo $m > 0$ und $n-m > \sigma$ ist, so bricht die Kette niemals ab, unter den Gleichungen $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0, \ldots$ kommen nur eine endliche Anzahl verschiedener vor, in den Formen $\chi_\varkappa$ sind von einer gewissen an stets die m ersten Coefficienten $= 0$, die übrigen $n-m$ sind beständig von Null verschieden.

4° Ist a eine algebraische Zahl σ^{ten} Grades (also reell und rational oder complex und vom zweiten Grade), so bricht die Kette nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab.

11. Wir beginnen den Nachweis dieses Satzes mit der Feststellung, daß, wenn zwei der Gleichungen $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0, \ldots$ identisch sind, die Größe a nothwendig eine algebraische Zahl n^{ten} oder niederen Grades ist.

Es seien also χ_ι und $\chi_\varkappa$ zwei unter jenen Formen, die sich bloß durch einen Factor θ unterscheiden, so daß $\chi_\varkappa = \theta\chi_\iota$ ist. Es sei $\iota < \varkappa$, so ist zufolge der Bemerkungen bei 30) der Betrag $|\theta| < 1$. Es seien P_ι und $P_\varkappa$ die Substitutionen der Kette, welche ξ in χ_ι und $\chi_\varkappa$ überführen. Durch $P_\varkappa P_\iota^{-1}$ geht dann ξ in $\theta\chi_\iota P_\iota^{-1}$, d. i. in $\theta\xi$ über. Es sei

$$32) \qquad |q_h^{(k)}| \qquad (h, k = 1, \ldots n),$$

h als den Index der Horizontal-, k als den Index der Verticalreihen gedacht, das Coefficientensystem der Substitution $P_\varkappa P_\iota^{-1}$, so ergiebt die Vergleichung der Coefficienten in den Formen $\theta\xi$ und $\xi P_\varkappa P_\iota^{-1}$:

$$33) \qquad \theta a^{k-1} = q_1^{(k)} + aq_2^{(k)} + \cdots + a^{n-1}q_n^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots n).$$

Die Coefficienten $q_h^{(k)}$ sind sämmtlich rationale Zahlen. Man entnimmt aus diesen Gleichungen, daß die Determinante

$$34) \qquad |\theta e_h^{(k)} - q_h^{(k)}| = 0 \quad \begin{pmatrix} e_h^{(k)} = 0,\ h \gtrless k;\ e_h^{(h)} = 1 \\ h, k = 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

ist, eine Gleichung, die symbolisch $|\theta P_\iota P_\iota^{-1} - P_\varkappa P_\iota^{-1}| = 0$ geschrieben werden kann.

Nimmt man zwei auf einander folgende der Gleichungen 33), für $k = j$ und $k = j+1$ $(j = 1, \ldots n-1)$, so entsteht aus ihnen durch Elimination von θ:

$$35) \qquad q_1^{(j+1)} + a(q_2^{(j+1)} - q_1^{(j)}) + \cdots + a^{n-1}(q_n^{(j+1)} - q_{n-1}^{(j)}) - a^n q_n^{(j)} = 0.$$

Man hat $n-1$ solcher Gleichungen für $j = 1, \ldots n-1$.

Entweder ist nun wenigstens eine unter ihnen so beschaffen, daß in ihr nicht alle Coefficienten der Potenzen von a Null sind; dann erweist sich durch die betreffende Gleichung die Größe a als eine algebraische Zahl u^{ten} oder niederen Grades.

Oder aber, es wären die Ausdrücke in a auf den linken Seiten der Gleichungen 35) für $j = 1, \ldots n-1$ sämmtlich identisch gleich Null; dann hätte man

$$36) \qquad q_1^{(j+1)} = 0,\ q_2^{(j+1)} = q_1^{(j)}, \ldots q_n^{(j+1)} = q_{n-1}^{(j)},\ 0 = q_n^{(j)}$$

für $j = 1, \ldots n-1$, also zuvörderst

$$q_1^{(2)} = 0,\ q_1^{(3)} = 0, \ldots q_1^{(n)} = 0; \quad q_n^{1)} = 0,\ q_n^{2} = 0, \ldots q_n^{(n-1)} = 0,$$

sodann allgemein, wenn $k > h$ ist, $q_h^{(k)} = q_{h-1}^{(k-1)} = \cdots = q_1^{(k-h+1)} = 0$, und wenn $k < h$ ist, $q_h^{(k)} = q_{h+1}^{(k+1)} = \cdots = q_n^{(n-h+k)} = 0$, endlich noch $q_1^{(1)} = q_2^{(2)} = \cdots = q_n^{(n)}$, welcher Werth $= q$ gesetzt werde. Nunmehr würden die Gleichungen 33) in $\theta a^{k-1} = q a^{k-1}$ $(k = 1, \ldots n)$ übergehen; man fände $\theta = q$ und hätte allgemein $q_h^{(k)} = q^{(k)}$, also $P_\varkappa P_\iota^{-1} = q P_\varepsilon P_\iota^{-1}$, mithin $P_\varkappa = \theta P_\iota$; jeder Coefficient in $P_\varkappa$ wäre gleich dem entsprechenden Coefficienten aus P_ι, multiplicirt in θ. Nun hat von den Coefficienten in $P_\varkappa$ wenigstens einer einen Betrag $= r_\varkappa$ und die Beträge der Coefficienten in P_ι sind sämmtlich $\leqq r_\iota$; es würde somit $r_\varkappa \leqq |\theta| r_\iota$ folgen, was mit $r_\varkappa > r_\iota$ und $|\theta| < 1$ im Widerspruch stünde. Die zweite Annahme, daß keine der Gleichungen 34) eine Bedingung für a giebt, ist danach unzulässig, und mithin ist nothwendig a eine algebraische Zahl n^{ten} oder niederen Grades.

12. Wir ziehen jetzt die Ergebnisse des § 1 heran. Es sei ε eine beliebige positive Größe; wir nehmen für die linearen Formen $\xi_1, \xi_2, \ldots$, an welche die Betrachtungen in § 1 anknüpfen, die $n+1$ Formen

$$x_1, \ldots x_n \text{ und } \frac{\xi}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}(x_1 + a x_2 + \cdots + a^{n-1} x_n).$$

Der Körper K wird dann der durch

$$37) \qquad -1 \leqq x_1 \leqq 1, \ldots -1 \leqq x_n \leqq 1, \qquad |\xi| \leqq \varepsilon$$

bestimmte Bereich. In diesem Bereich ist offenbar stets

$$|\xi| \leqq 1 + |a| + \cdots + |a^{n-1}|,$$

welche Größe C^* heiße; wir wollen deshalb jedenfalls $\varepsilon \leqq C^*$ voraussetzen. Wir haben nach 12) die fundamentale Ungleichung

$$12\,b) \qquad F_1 \ldots F_n J \leqq n!\, 2^n,$$

wo J das Volumen von K ist und die Bedeutung von $F_1, \ldots F_n$ aus 3. zu ersehen ist.

Es werde $\sigma = 1$ gesetzt, wenn a reell ist, $\sigma = 2$, wenn a complex ist, und im letzteren Falle setze man $\xi = \eta + i\zeta$, so daß η und ζ Formen mit reellen Coefficienten sind. Die Bedingung $|\xi| \leqq \varepsilon$ kommt für $\sigma = 1$ auf $-\varepsilon \leqq \xi \leqq \varepsilon$, für $\sigma = 2$ auf $\eta^2 + \zeta^2 \leqq \varepsilon^2$ hinaus. Denkt man sich zu ξ, bez. zu η, ζ weitere $n - \sigma$ reelle lineare Formen $v_1, \ldots v_{n-\sigma}$ hinzugenommen, so daß n Formen mit einer Determinante 1 entstehen, so erkennt man, daß mit nach

Null abnehmendem ε das Verhältniß $\frac{J}{2\varepsilon}$ für $\sigma = 1$ oder $\frac{J}{\pi\varepsilon^2}$ für $\sigma = 2$ nach dem Werthe des über den Bereich

$$|\xi| = 0, \qquad -1 \leqq x_1 \leqq 1, \ldots -1 \leqq x_n \leqq 1$$

erstreckten Integrals $\int dv_1 \ldots dv_{n-\sigma}$, also nach einer bestimmten positiven Größe convergirt. Danach wird man eine endliche von a abhängende, von ε aber unabhängige Größe M angeben können, sodaß für alle Werthe $\varepsilon \leqq C^*$ stets

$$38) \qquad \left(\frac{n!\,2^n}{J}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \varepsilon \leqq M$$

ist. Die Ungleichung 12b) geht dann in

$$39) \qquad \varepsilon (F_1 \ldots F_n)^{\frac{1}{\sigma}} \leqq M$$

über. Wegen $F_1 \leqq \ldots \leqq F_n$ erhält man daraus insbesondere

$$40) \qquad \varepsilon F_1^{\frac{n}{\sigma}} \leqq M$$

und ferner

$$41) \qquad \varepsilon^\sigma F_1^{n-1} F_n \leqq M^\sigma.$$

Nunmehr sollen einige Folgerungen aus diesen Ungleichungen 40) und 41) entwickelt werden.

13. Wenn in einer Form χ zur Kette der erste Coefficient $\alpha_1 = 0$ ausfällt, erweist sich durch diese Gleichung a als eine algebraische Zahl $n-1^{\text{ten}}$ oder niederen Grades. Eine solche Beschaffenheit von a wollen wir zunächst ausschließen. Dann ist also für jedes Kettenglied gewiß $|\alpha_1| > 0$. Wir zeigen, daß alsdann im Verlauf der Kette der Betrag $|\alpha_1|$ schließlich unter jede Grenze sinken muß.

Es sei P in 27) eine zur Zahl r gehörende Substitution, χ in 28) die zugehörige Transformirte von ξ. Wir nehmen in 12. den Parameter $\varepsilon = \frac{|\alpha_1|}{r}$; (diese Größe ist $\leqq C^*$, weil $|p_1^{(1)}|, \ldots |p_n^{(1)}| \leqq r$ ist). Man hat hier ein von $0, \ldots 0$ verschiedenes ganzzahliges System $x_1, \ldots x_n$, wofür $|x_k| \leqq r$ $(k = 1, \ldots n)$ und $\left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right| = \frac{|\alpha_1|}{\left|\frac{\alpha_1}{r}\right|} = r$ ist, aber kein System dieser Art, wofür stets $|x_k| < r$ und $\left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right| < r$ wäre. Nach der Bedeutung von F_1 (s. 3.) ist daher dann $F_1 = r$.

Die Ungleichung 40) ergiebt nunmehr

$$42) \qquad |\alpha_1| \leqq M r^{-\frac{n-\sigma}{\sigma}}.$$

Diese Abschätzung für $|\alpha_1|$ zeigt in der That, daß mit wachsendem r der Werth $|\alpha_1|$ schließlich unter jede Grenze sinken muß [1]). In den bezeichneten Fällen, in denen α_1 niemals Null werden kann, hat infolgedessen die Kette nothwendig einen unendlichen Verlauf, sie kann niemals abbrechen.

Insbesondere bricht auf diese Weise die Kette niemals ab, wenn a nicht eine algebraische Zahl n^{ten} oder niedrigeren Grades ist. Verbindet man hiermit das Ergebniß aus 11, wonach unter derselben Voraussetzung niemals zwei der Formen $\chi_\varkappa$ sich bloß durch einen Factor unterscheiden, so ist zunächst der Punkt 1° unseres Kriteriums völlig sichergestellt.

14. Um den Punkt 2° zu erweisen, nehmen wir nunmehr an, daß a als eine algebraische Zahl n^{ten} Grades gegeben ist. In diesem Falle können wir außer mit der Ungleichung 39) noch mit dem Satze operiren, daß die Norm einer von Null verschiedenen ganzen algebraischen Zahl eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl und daher dem Betrage nach $\geqq 1$ ist.

Es sei

$$43) \qquad g_0 a^n + g_1 a^{n-1} + \cdots + g_n = 0$$

die Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen ganzen Coefficienten ohne gemeinsamen Theiler und positivem g_0, der a genügt. Es sei, wenn a complex, $\sigma = 2$ ist, a° die zu a conjugirt imaginäre Größe. Die Wurzeln jener Gleichung n^{ten} Grades außer a, bez. außer a und a° mögen $a', a'', \ldots a^{(n-\sigma)}$ heißen. Ferner sollen die zu einer Zahl ξ des Körpers von a conjugirten Zahlen in den Körpern von $(a^\circ), a', \ldots a^{(n-\sigma)}$ mit $(\xi^\circ), \xi', \ldots \xi^{(n-\sigma)}$ bezeichnet werden.

---

1) Sind α, β zwei reelle Größen und ist $0 < |\beta| \leqq |\alpha|$, so hat man eine ganze Zahl y, so daß $|\alpha + y\beta| \leqq \frac{1}{2}|\beta|$ ist. Sind α, β, γ drei reelle oder complexe Größen, sodaß $0 < |\gamma| \leqq |\beta| \leqq |\alpha|$ und $\frac{\gamma}{\beta} = \delta + i\varepsilon$ nicht reell, also $\varepsilon \neq 0$ ist, so kann man zwei reelle Größen v, w finden, sodaß $\alpha + v\beta + w\gamma = \alpha + (v + \delta w)\beta + iw\varepsilon\beta = 0$ ist, und sind dann z und y zwei ganze Zahlen, sodaß $|z - w| \leqq \frac{1}{2}$ und $|y + \delta z - v - \delta w| \leqq \frac{1}{2}$ ist, so wird $|\alpha + y\beta + z\gamma| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta|$. Mit diesen Hülfsmitteln kann man direct einsehen, daß in den Formen χ zur Kette sogar $|\alpha_n|$ schließlich unter jede Grenze sinkt, mit Ausnahme des Falles, daß $n = 3$, a complex und der reelle Theil von a rational ist, in welchem Falle nur $|\alpha_1|$ und $|\alpha_2|$ unter jede Grenze sinken, aber für $|\alpha_3|$ eine positive untere Grenze besteht, und ferner der Fälle, daß a eine algebraische Zahl σ^{ten} Grades ist, in welchen Fällen die Kette mit einem letzten Gliede abbricht.

Das Multiplum $g_0 a$ ist eine ganze algebraische Zahl n^{ten} Grades. Infolgedessen ist für ein ganzzahliges, von $0, \dots 0$ verschiedenes System $x_1, \dots x_n$ der Werth von $g_0^{n-1}\xi$ stets eine von Null verschiedene ganze Zahl im Körper von a und daher deren Norm in diesem Körper $Nm(g_0^{n-1}\xi) = g_0^{n(n-1)}\xi(\xi^0)\xi' \dots \xi^{(n-\sigma)}$ dem Betrage nach $\geqq 1$; der eingeklammerte Factor ξ^0 kommt für $\sigma = 2$ in Betracht und dann ist $|\xi^0| = |\xi|$. Es sei C der größte Werth unter den $n-\sigma$ Ausdrücken $1+|a^{(j)}|+\dots+|a^{(j)}|^{n-1}$ für $j = 1, \dots n-\sigma$. Sind $x_1, \dots x_n$ in ihren Beträgen $\leqq r$, wo r eine positive Größe ist, so hat man

$$|\xi^{(j)}| \leqq Cr \qquad (j = 1, \dots n-\sigma) \tag{44}$$

und entsteht nunmehr die Ungleichung $g_0^{n(n-1)} C^{n-\sigma} |\xi|^\sigma r^{n-\sigma} \geqq 1$ oder

$$|\xi|^\sigma r^{n-\sigma} \geqq b^\sigma, \tag{45}$$

wo b eine gewisse nur von a, nicht von der Größe von r abhängende Constante vorstellt.

Es sei wieder P die zu einer ganzen Zahl r gehörende Substitution der Kette und χ in 28) die Form ξP. Dann geht, wenn für $x_1, \dots x_n$ die erste Verticalreihe von P genommen wird, aus 45) zuvörderst

$$|\alpha_1| \geqq b r^{-\frac{n-\sigma}{\sigma}} \tag{46}$$

hervor.

Es sei sodann ε wieder eine beliebige positive Größe $\leqq C^*$ und betrachten wir die Ungleichung 41) dafür. Nach der Bedeutung von F_1 in 12. hat man ein von $0, \dots 0$ verschiedenes ganzzahliges System $x_1, \dots x_n$, wofür $|x_k| \leqq F_1$ $(k = 1, \dots n)$ und $\left|\frac{\xi}{\varepsilon}\right| \leqq F_1$, also $|\xi| \leqq \varepsilon F_1$ ist. Die Ungleichung 45) ergiebt daher $(\varepsilon F_1)^\sigma F_1^{n-\sigma} \geqq b^\sigma$ oder

$$\varepsilon F_1^{\frac{n}{\sigma}} \geqq b. \tag{47}$$

Führt man die hierdurch angewiesene untere Grenze in 41) ein, so folgt

$$\varepsilon F_n^{\frac{n}{\sigma}} \leqq B, \tag{48}$$

wo $B = \frac{M^n}{b^{n-1}}$ wieder eine nur von a, nicht von ε abhängende Constante vorstellt.

Nunmehr wollen wir speciell $\varepsilon = \frac{|\alpha_n|}{r}$ nehmen, wo α_n der

letzte Coefficient in χ ist. Dann ist $F_n = r$; denn man hat hier n unabhängige ganzzahlige Systeme $x_1, \ldots x_n$, für welche $x_k < r$ $(k = 1, \ldots n)$ und $\frac{\xi}{\varepsilon} \leqq \frac{\alpha_n}{\frac{\alpha_n}{r}} = r$ ist, aber nach der Bedeutung von α_n jedenfalls nicht n unabhängige ganzzahlige Systeme $x_1, \ldots x_n$, für welche $x_k < r$ $(k = 1, \ldots n)$ und $\frac{\xi}{\varepsilon} < r$ wäre. Die Formel 48) ergiebt nunmehr

49) $$|\alpha_n| \leqq Br^{-\frac{n-\sigma}{\sigma}}.$$

Wir stellen 46), 49) und 29) zusammen in:

50) $$br^{-\frac{n-\sigma}{\sigma}} \leqq |\alpha_1| \leqq \ldots \leqq |\alpha_n| \leqq Br^{-\frac{n-\sigma}{\sigma}}.$$

Man ersieht daraus zunächst, daß im Verlauf der Kette selbst $|\alpha_n|$ schließlich unter jede Grenze sinkt. Die Kette bricht also jedenfalls niemals ab.

Gewisse weitere Ungleichungen erschließen wir für die Normen der Zahlen α_k $(k = 1, \ldots n)$ und für ihre conjugirten Zahlen $\alpha_k^{(j)}$. Nach 44) werden wir, da die Zahlen der k^{ten} Verticalreihe von P, welche $\xi = \alpha_k$ machen, $\leqq r$ sind,

51) $$|\alpha_k^{(j)}| \leqq Cr \qquad (j = 1, \ldots n - \sigma)$$

haben. Nehmen wir dazu die in 49) erhaltene obere Grenze für $|\alpha_k|$, womit noch im Falle $\sigma = 2$ sich $|\alpha_k^{(j)}|$ deckt, so folgt

52) $$|Nm(g_0^{n-1}\alpha_k)| \leqq g_0^{n(n-1)} B^n C^{n-\sigma},$$

wo die Grenze rechts nur von a, nicht von der Zahl r abhängig erscheint. Nun ist $Nm(g_0^{n-1}\alpha_k)$ eine ganze rationale Zahl und daher nach dieser Ungleichung nur einer endlichen Anzahl von Werthen bei allen möglichen Werthen von r fähig.

Andererseits hat man, indem diese Zahl $Nm(g_0^{n-1}\alpha_k)$ von Null verschieden ist:

53) $$Nm(g_0^{n-1}\alpha_k) = g_0^{n(n-1)}\alpha_k(\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}, \ldots \alpha_k^{(n-\sigma)}) \geqq 1.$$

Führt man hierin für α_k, $\alpha_k^{(j)}$ die obere Grenze aus 50), und für die Beträge $\alpha_k^{(1)}, \ldots \alpha_k^{(n-\sigma)}$ mit Ausnahme eines Factors $\alpha_k^{(j)}$ die obere Grenze aus 51) ein, so folgt für diesen noch übrigen Betrag:

54) $$\alpha_k^{(j)} \leqq \varphi \qquad (j = 1, \ldots n - \sigma),$$

wo $\varphi = \frac{1}{g_0^{n-1} B^n C^{n-\sigma}}$ wieder nur von a, nicht von r abhängig ist.

Sind nun h, k irgend zwei der Indices $1, 2, \ldots n$, so hat man wegen 50):

55) $$\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_h}\right| \left(= \left|\frac{\alpha_k^0}{\alpha_h^0}\right|\right) \leqq \frac{B}{b}$$

und aus 51) und 54):

56) $$\left|\frac{\alpha_k^{(j)}}{\alpha_h^{(j)}}\right| \leqq \frac{C}{c} \qquad (j = 1, \ldots n-\sigma).$$

Zudem sind $g_0^{n-1}\alpha_h$ und $g_0^{n-1}\alpha_k$ und alle ihre conjugirten Zahlen ganze algebraische Zahlen und liegt nach 52) die ganze rationale Zahl $|Nm(g_0^{n-1}\alpha_h)|$ unter einer bestimmten von a allein abhängenden Grenze. Aus diesen Umständen geht hervor, daß in der algebraischen Gleichung n^{ten} Grades für t:

57) $$Nm(g_0^{n-1}\alpha_h)\cdot\left(t-\frac{\alpha_k}{\alpha_h}\right)\left(\left(t-\frac{\alpha_k^0}{\alpha_h^0}\right)\right)\left(t-\frac{\alpha_k'}{\alpha_h'}\right)\cdots\left(t-\frac{\alpha_k^{(n-\sigma)}}{\alpha_h^{(n-\sigma)}}\right) = 0$$

alle $n+1$ Coefficienten der linken Seite ganze rationale Zahlen sind und in ihren Beträgen unterhalb bestimmter nur von a abhängender Grenzen liegen. Danach kommen für die Coefficienten dieser Gleichung von vorn herein für alle r nur eine endliche Anzahl von Werthsystemen und also für ein jedes Verhältniß $\frac{\alpha_k}{\alpha_h}$ von vorn herein für alle r nur eine endliche Anzahl von algebraischen Zahlen in Betracht. Mithin können in der That die sämmtlichen unendlich vielen Linearformen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ der Kette hier, wo a eine algebraische Zahl n^{ten} Grades ist, nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Verhältnissen $\alpha_1 : \alpha_2 : \ldots : \alpha_n$ der Coefficienten darbieten, sie gehen also sämmtlich aus einer endlichen Anzahl unter ihnen durch Multiplication mit Factoren hervor. Damit ist der Punkt 2° unseres Kriteriums völlig erwiesen.

15. Wir können noch eine Bemerkung über die Natur derjenigen Factoren θ hinzufügen, die hier in Beziehungen $\chi_\varkappa = \theta\chi_\iota$ auftreten und die als Quotienten von Zahlen im Körper von a jedenfalls auch in diesem Körper liegen.

Zu jeder Substitution P_ι der Kette kann man nach der in 2. auseinandergesetzten Methode eine ganzzahlige Substitution A_ι mit einer Determinante ± 1 bestimmen, sodaß die Coefficienten in $P_\iota^{-1}A_\iota$ den in 8) und 9) für die Zahlen $\gamma_h^{(k)}$ angegebenen Bedingungen entsprechen. In dieser Substitution $P_\iota^{-1}A_\iota$ sind die Coefficienten rationale Zahlen mit der Determinante von P_ι als Nenner. Letztere ist nach dem in 9. Bewiesenen stets dem Betrage nach $\leqq n!$ Nach den Bedingungen 8) und 9) kommen dadurch für

alle Coefficienten von $P_\iota^{-1}A_\iota$ von vorn herein nur eine endliche Anzahl verschiedener Werthe in Frage. Verbindet man damit das soeben in 14. erzielte Resultat, so erkennt man, daß auch für den Inbegriff der Gleichung $\chi_\iota = 0$ und der Substitution $P_\iota^{-1}A_\iota$ zusammen in der ganzen unendlichen Kette nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Bestimmungen vorkommen.

Hat man nun für zwei Indices ι und $\varkappa$ sowohl $\chi_\varkappa = \theta\chi_\iota$, wo θ ein Factor ist, als auch $P_\varkappa^{-1}A_\varkappa = P_\iota^{-1}A_\iota$, so wird $P_\varkappa P_\iota^{-1} = A_\varkappa A_\iota^{-1}$, also eine ganzzahlige Substitution mit einer Determinante ± 1. Durch diese Substitution geht die Linearform ξ (in 26)) in $\theta\xi$ über, während $A_\iota A_\iota^{-1}$, d. i. die identische Substitution, ξ in ξ überführt. Für den Factor θ erhält man dadurch eine Gleichung n^{ten} Grades, welche sich in der oben bei 34) erklärten symbolischen Weise $|\theta A_\iota A_\iota^{-1} - A_\varkappa A_\iota^{-1}| = 0$ oder $|\theta A_\iota - A_\varkappa| = 0$ schreiben läßt. In dieser Gleichung sind alle Coefficienten ganze rationale Zahlen und ist sowohl der erste wie der letzte Coefficient gleich ± 1. Also ist dann sowohl θ wie $\frac{1}{\theta}$ eine ganze algebraische Zahl, mithin θ eine Einheit in dem Zahlenkörper von a. Sonach gilt der Zusatz: Unter den Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ der Kette kann man eine endliche Anzahl angeben so, daß aus ihnen alle Formen der Kette durch Multiplication mit solchen Factoren hervorgehen, welche Einheiten im Körper von a sind.

Ist $\chi_\iota = \alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_n\varepsilon_n$, $\chi_\varkappa = \beta_1\varepsilon_1 + \cdots + \beta_n\varepsilon_n$ und sind $r_\iota, r_\varkappa$ die Zahlen, zu denen $P_\iota, P_\varkappa$ gehören, so hat man ferner nach 51) und 54)

$$cr_\iota \leqq |\alpha_k^{(j)}| \leqq Cr_\iota, \qquad cr_\varkappa \leqq |\beta_k^{(j)}| \leqq Cr_\varkappa \quad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots n, \\ j = 1, \ldots n-\sigma \end{pmatrix};$$

indem $\beta_k = \theta\alpha_k$ ist, folgt daraus

$$\frac{c}{C}\frac{r_\varkappa}{r_\iota} \geqq |\theta^{(j)}| \leqq \frac{C}{c}\frac{r_\varkappa}{r_\iota} \qquad (j = 1, \ldots n-\sigma).$$

Man hat sodann die von den Zahlen $r_\iota, r_\varkappa$ freie Beziehung

$$58) \qquad \frac{c^2}{C^2} \leqq \left|\frac{\theta^{(j_*)}}{\theta^{(j)}}\right| \leqq \frac{C^2}{c^2} \quad (j_* \neq j;\ j, j_* = 1, \ldots n-\sigma).$$

Für die Einheiten θ, auf die man hier geführt wird, liegen also die Verhältnisse der Beträge der $n-\sigma$ conjugirten Werthe $\theta', \ldots \theta^{(n-\sigma)}$ stets zwischen zwei von vorn herein anzuweisenden Grenzen, ein Umstand, der für die weitere Erforschung der Substitutionen-

ketten zu algebraischen Zahlen n^{ten} Grades von hervorragender Bedeutung ist.

16. Es sei jetzt a eine algebraische Zahl $n-m^{ten}$ Grades, wo $m>0$ und $<n$ ist, und es sei

$$59) \qquad g_{n-m}+g_{n-m-1}a+\cdots+g_0a^{n-m}=0$$

die Gleichung $n-m^{ten}$ Grades mit rationalen ganzen Coefficienten ohne gemeinsamen Theiler und positivem g_0, der a genügt. Es sei unter den Beträgen der Coefficienten dieser Gleichung der größte Werth g^*. Man entnimmt aus 59)

$$g_{n-m}a^{h-1}+g_{n-m-1}a^h+\cdots+g_0a^{n-m+h-1}=0 \quad (h=1,\ldots m),$$

d. i. $x_1+ax_2+\cdots+a^{n-1}x_n=0$ für gewisse m besondere, von $0,\ldots 0$ verschiedene ganzzahlige Systeme $x_1,\ldots x_n$. Diese m Systeme sind von einander unabhängig, denn schreibt man sie in m Verticalreihen auf, so hat man in den letzten m Horizontalreihen der entstehenden Matrix, welche die Werthe $x_{n-m+1},\ldots x_n$ enthalten, ein quadratisches Schema, wobei in der Hauptdiagonale alle Elemente $=g_0$ und unterhalb derselben alle Elemente $=0$ sind, ein Schema also, das die von Null verschiedene Determinante g_0^m ergiebt. Alle jene Zahlen $x_1,\ldots x_n$ sind ferner dem Betrage nach $\leqq g^*$.

Es sei nun P eine zur Zahl r gehörende Substitution der Kette und χ die Form, in welche ξ durch P übergeht. Aus dem eben Gesagten erkennt man, daß, sowie $r\geqq g^*$ ist, in χ jedenfalls $\alpha_1=0,\ldots\alpha_m=0$ sein muß. Dagegen muß stets α_{m+1} von Null verschieden bleiben. Denn hätte man $m+1$ unabhängige ganzzahlige Systeme $x_1,\ldots x_n$, wofür $\xi=0$ ausfiele, so würde man aus den betreffenden $m+1$ Gleichungen durch m Mal hintereinander vorgenommene Elimination der jedesmal sich darbietenden höchsten Potenz von a schließlich eine Gleichung für a mit rationalen Coefficienten von einem Grade $<n-m$ gewinnen können.

Es sei wieder $\sigma=1$ oder $=2$, je nachdem a reell oder complex ist, und im letzteren Falle sei a° die zu a conjugirt imaginäre Zahl. Ferner seien $a', a'', \ldots a^{(n-m-\sigma)}$ die Wurzeln der Gleichung $n-m^{ten}$ Grades für a außer a, bez. außer a und a°. Endlich, wenn α eine Zahl im Körper von a bedeutet, so seien allgemein $(\alpha^\circ), \alpha', \ldots \alpha^{(n-m-\sigma)}$ die conjugirten Zahlen in den Körper n von (a°), $a', \ldots a^{(n-m-\sigma)}$.

Wir können jetzt die in 14. gewonnenen Sätze über die Substitutionenkette n mit n Variabeln zu algebraischen Zahlen n^{ten} Grades in der Weise heranziehen, daß wir die Zahl n dort durch den

Werth $n-m$ hier ersetzen. Das in 49) liegende Resultat zeigt alsdann, daß man im gegenwärtigen Falle zur beliebigen Zahl r stets $n-m$ ganzzahlige Systeme $y_1 = y_1^{(k)}, \dots y_{n-m} = y_{n-m}^{(k)}$ $(k = 1, \dots n-m)$ mit von Null verschiedener Determinante finden kann, so daß alle Zahlen $y_h^{(k)}$ darin dem Betrage nach $\leqq r$ sind, und daß für jedes einzelne dieser $n-m$ Systeme

$$|y_1 + a y_2 + \cdots + a^{n-m-1} y_{n-m}| \leqq \overline{B} r^{-\frac{n-m-\sigma}{\sigma}}$$

ausfällt, wo $\overline{B}$ eine gewisse nur von a, nicht von r abhängende Constante ist. Setzt man zu jedem dieser Systeme $y_1, \dots y_{n-m}$ dann $x_1 = y_1, \dots x_{n-m} = y_{n-m}$, $x_{n-m+1} = 0, \dots x_n = 0$, so bekommt man $n-m$ ganzzahlige Systeme $x_1, \dots x_n$, die von den oben erwähnten speciellen m solchen Systemen unabhängig sind. Danach wird man, sowie $r \geqq g^*$ ist, außer $|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_m| = 0$ weiter stets

$$60) \qquad 0 < |\alpha_{m+1}| \leqq \dots \leqq |\alpha_n| \leqq \overline{B} r^{-\frac{n-m-\sigma}{\sigma}}$$

haben.

Es sei jetzt zuvörderst $n-m > \sigma$. Alsdann erkennt man aus 60), daß die Beträge $|\alpha_{m+1}|, \dots |\alpha_n|$ im Verlauf der Kette unter jede Grenze sinken, ohne jemals Null zu werden; die Kette bricht also jedenfalls nicht ab. Man hat ferner stets

$$61) \qquad |\alpha_k^{(j)}| \leqq \overline{C} r \qquad \begin{pmatrix} k = m+1, \dots n, \\ j = 1, \dots n-m-\sigma \end{pmatrix},$$

wenn $\overline{C}$ der größte unter den Werthen $1 + |a^{(j)}| + \cdots + |a^{(j)}|^{n-1}$ $(j = 1, \dots n-m-\sigma)$ ist. Andererseits ist $g_0 a$ eine ganze algebraische Zahl, desgleichen daher jede Zahl $g_0^{n-1} \alpha_k$ $(k = m+1, \dots n)$, und da diese Zahlen von Null verschieden sind, müssen mithin ihre Normen im Körper von a dem Betrage nach $\geqq 1$ sein; man hat also

$$62) \qquad g_0^{(n-m)(n-1)} |\alpha_k|^\sigma |\alpha_k' \dots \alpha_k^{(n-m-\sigma)}| \geqq 1 \qquad (k = m+1, \dots n).$$

Führt man hierin für $n-m-\sigma$ der $n-m-\sigma+1$ absoluten Beträge $|\alpha_k|, |\alpha_k'|, \dots |\alpha_k^{(n-m-\sigma)}|$ die in 60) bez. 61) angewiesenen oberen Grenzen ein, so erhält man für den noch übrigen dieser Beträge eine untere Grenze; man findet

$$63) \qquad |\alpha_k| \geqq \overline{b} r^{-\frac{n-m-\sigma}{\sigma}}, \quad \alpha_k^{(j)} \geqq \overline{c} r \quad \begin{pmatrix} k = m+1, \dots n, \\ j = 1, \dots n-m-\sigma \end{pmatrix}$$

mit gewissen von r nicht abhängenden Constanten b und c, und daraus folgt dann

$$64) \quad \frac{\alpha_k}{\alpha_h} \left(= \frac{\alpha_k^0}{\alpha_h^0} \right) \leqq \frac{\overline{B}}{\overline{b}}, \quad \frac{\alpha_k^{(j)}}{\alpha_h^{(j)}} \leqq \frac{\overline{C}}{\overline{c}} \quad \begin{pmatrix} h, k = m+1, \dots n; \ h \geqq k \\ j = 1, \dots n-m-\sigma \end{pmatrix}$$

Andererseits findet man aus 60) und 61) die von r nicht abhängende Größe $g_0^{(n-m)(n-1)}\overline{B}^{\sigma}\overline{C}^{n-m-\sigma}$ als obere Grenze für die Beträge der Normen von $g_0^{n-1}\alpha_k$ $(k = m+1, \ldots n)$. Aus 64) und aus diesem letzten Umstande schließt man endlich durch die entsprechende Ueberlegung wie bei 57), daß für die Verhältnisse der Coefficienten $\alpha_{m+1}, \ldots \alpha_n$ in χ (die Zahl $r \geqq g^*$ angenommen) nur eine endliche Anzahl von algebraischen Zahlen in Betracht kommen. Danach sind in der That sämmtliche Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ der Kette aus einer endlichen Anzahl unter ihnen durch Multiplication mit Factoren abzuleiten. Damit ist der Punkt 3° des Kriteriums erwiesen. Indem man noch den Umstand heranzieht, daß auch im gegenwärtigen Falle nach 9. die Determinante jeder Substitution der Kette dem Betrage nach $\leqq n!$ ist, kann man wieder hinzufügen, daß sich unter den Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ eine endliche Anzahl hervorheben läßt, aus denen alle diese Formen durch Multiplication mit solchen Factoren entstehen, welche Einheiten in dem Zahlenkörper von a sind.

Es sei endlich $n-m = \sigma$. Ist $\sigma = 2$, also a complex, so bleiben in χ für $r \geqq g^*$ allein die Coefficienten α_{n-1}, α_n von Null verschieden. In den quadratischen Gleichungen

$$(t-g_0^{n-1}\alpha_{n-1})(t-g_0^{n-1}\alpha_{n-1}^{\circ}) = 0, \qquad (t-g_0^{n-1}\alpha_n)(t-g_0^{n-1}\alpha_n^{\circ}) = 0$$

sind die Coefficienten ganze rationale Zahlen und hat man durch 60) von r unabhängige obere Grenzen für die Beträge derselben. Danach kommen für α_{n-1}, α_n nur eine endliche Anzahl von Werthen in Betracht. Da nun nach einer Bemerkung bei 30) alle Formen χ_x der Kette verschieden ausfallen, muß danach die Kette nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen. — Ist $\sigma = 1$, also a reell und rational, so bleibt für $r \geqq g^*$ nur α_n von Null verschieden, dabei ist $g_0^{n-1}\alpha_n$ eine ganze rationale Zahl und liegt zufolge 60) dem Betrage nach unterhalb einer gewissen von r unabhängigen Grenze. Die Kette bricht daher auch hier nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab. Damit ist auch der letzte Punkt des in 10. aufgestellten Satzes bewiesen.

Zürich, den 9. Februar 1899.

Ueber ganzzahlige Gleichungen ohne Affect.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1899 von D. Hilbert.

Abel's Beweis der Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften und höheren Grades schließt bekanntlich nicht die Auflösbarkeit für specielle Werthe der Coefficienten aus. Wenn ins Besondere die Coefficienten nur ganzzahlige Werthe haben sollen, so läßt Abel's Beweis die Frage ganz offen, ob überhaupt unter diesen Gleichungen unauflösbare vorhanden sind. Auch die Galois'sche Theorie giebt ohne Weiteres keine Antwort auf diese Frage. Denn von vorne herein ist nicht einzusehen, warum nicht die Galois'sche Resolvente für alle ganzzahligen Werthe der Coefficienten reducibel werden könnte, obgleich sie für veränderliche Coefficienten irreducibel ist[1]). Die Auflösbarkeit der Gleichung verlangt allerdings noch mehr als das bloße Zerfallen der Galois'schen Resolvente. Aber die weiteren Bedingungen sind insofern von derselben Art, daß von vorne herein nicht einzusehen ist, warum sie nicht für alle ganzzahligen Gleichungen erfüllt sein könnten.

Ich will im Folgenden nur die erste Bedingung das Zerfallen der Galois'schen Resolvente betrachten und also nicht nach den unauflösbaren ganzzahligen Gleichungen, sondern nach der Classe

---

1) Erst D. Hilbert hat diese Lücke ausgefüllt. Er zeigt (Journ. für Math. Bd. 110 p. 104), daß, wenn man in einer irreducibeln ganzen rationalen Function mehrerer Veränderlichen mit ganzzahligen Coefficienten für einige der Veränderlichen ganze Zahlen einsetzt, es immer auf unendlich viele Weisen möglich ist, die ganzen Zahlen so zu wählen, daß eine irreducible Function der übrigen Veränderlichen entsteht.

Andererseits findet man aus 60) und 61) die von r nicht abhängende Größe $g_0^{(n-m)(n-1)}\overline{B}^{\sigma}\overline{C}^{n-m-\sigma}$ als obere Grenze für die Beträge der Normen von $g_0^{n-1}\alpha_k$ $(k = m+1, \ldots n)$. Aus 64) und aus diesem letzten Umstande schließt man endlich durch die entsprechende Ueberlegung wie bei 57), daß für die Verhältnisse der Coefficienten $\alpha_{m+1}, \ldots \alpha_n$ in χ (die Zahl $r \geqq g^*$ angenommen) nur eine endliche Anzahl von algebraischen Zahlen in Betracht kommen. Danach sind in der That sämmtliche Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ der Kette aus einer endlichen Anzahl unter ihnen durch Multiplication mit Factoren abzuleiten. Damit ist der Punkt 3° des Kriteriums erwiesen. Indem man noch den Umstand heranzieht, daß auch im gegenwärtigen Falle nach 9. die Determinante jeder Substitution der Kette dem Betrage nach $\leqq n!$ ist, kann man wieder hinzufügen, daß sich unter den Formen $\chi_1, \chi_2, \ldots$ eine endliche Anzahl hervorheben läßt, aus denen alle diese Formen durch Multiplication mit solchen Factoren entstehen, welche Einheiten in dem Zahlenkörper von a sind.

Es sei endlich $n-m = \sigma$. Ist $\sigma = 2$, also a complex, so bleiben in χ für $r \geqq g^*$ allein die Coefficienten α_{n-1}, α_n von Null verschieden. In den quadratischen Gleichungen

$$(t-g_0^{n-1}\alpha_{n-1})(t-g_0^{n-1}\alpha_{n-1}^{\circ}) = 0, \qquad (t-g_0^{n-1}\alpha_n)(t-g_0^{n-1}\alpha_n^{\circ}) = 0$$

sind die Coefficienten ganze rationale Zahlen und hat man durch 60) von r unabhängige obere Grenzen für die Beträge derselben. Danach kommen für α_{n-1}, α_n nur eine endliche Anzahl von Werthen in Betracht. Da nun nach einer Bemerkung bei 30) alle Formen $\chi_\varkappa$ der Kette verschieden ausfallen, muß danach die Kette nach einer endlichen Anzahl von Gliedern abbrechen. — Ist $\sigma = 1$, also a reell und rational, so bleibt für $r \geqq g^*$ nur α_n von Null verschieden, dabei ist $g_0^{n-1}\alpha_n$ eine ganze rationale Zahl und liegt zufolge 60) dem Betrage nach unterhalb einer gewissen von r unabhängigen Grenze. Die Kette bricht daher auch hier nach einer endlichen Anzahl von Gliedern ab. Damit ist auch der letzte Punkt des in 10. aufgestellten Satzes bewiesen.

Zürich, den 9. Februar 1899.

Ueber ganzzahlige Gleichungen ohne Affect.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1899 von D. Hilbert.

Abel's Beweis der Unauflösbarkeit der Gleichungen fünften und höheren Grades schließt bekanntlich nicht die Auflösbarkeit für specielle Werthe der Coefficienten aus. Wenn ins Besondere die Coefficienten nur ganzzahlige Werthe haben sollen, so läßt Abel's Beweis die Frage ganz offen, ob überhaupt unter diesen Gleichungen unauflösbare vorhanden sind. Auch die Galois'sche Theorie giebt ohne Weiteres keine Antwort auf diese Frage. Denn von vorne herein ist nicht einzusehen, warum nicht die Galois'sche Resolvente für alle ganzzahligen Werthe der Coefficienten reducibel werden könnte, obgleich sie für veränderliche Coefficienten irreducibel ist[1]). Die Auflösbarkeit der Gleichung verlangt allerdings noch mehr als das bloße Zerfallen der Galois'schen Resolvente. Aber die weiteren Bedingungen sind insofern von derselben Art, daß von vorne herein nicht einzusehen ist, warum sie nicht für alle ganzzahligen Gleichungen erfüllt sein könnten.

Ich will im Folgenden nur die erste Bedingung das Zerfallen der Galois'schen Resolvente betrachten und also nicht nach den unauflösbaren ganzzahligen Gleichungen, sondern nach der Classe

---

1) Erst D. Hilbert hat diese Lücke ausgefüllt. Er zeigt (Journ. für Math. Bd. 110 p. 104), daß, wenn man in einer irreducibeln ganzen rationalen Function mehrerer Veränderlichen mit ganzzahligen Coefficienten für einige der Veränderlichen ganze Zahlen einsetzt, es immer auf unendlich viele Weisen möglich ist, die ganzen Zahlen so zu wählen, daß eine irreducible Function der übrigen Veränderlichen entsteht.

ganzzahliger Gleichungen fragen, für welche die Galois'sche Resolvente nicht zerfällt, oder gemäß Herrn Kroneckers Bezeichnung nach den Gleichungen ohne Affect.

Der Gegenstand dieser Note ist der folgende Satz:

„Ertheilt man dem Coefficienten von x^n in einer Gleichung n^{ten} Grades den Werth 1 und legt allen Coefficienten außer demjenigen von x^{n-1} irgend welche ganzzahlige Werthe bei, so giebt es im allgemeinen d. h. abgesehen von den Fällen, wo die den Coefficienten beigelegten Werthsysteme gewissen Gleichungen genügen nur eine endliche Anzahl von ganzzahligen Werthen des Coefficienten von x^{n-1}, für welche die Galois'sche Resolvente der Gleichung in mehr als 2 Factoren zerfällt".

Die Gleichung n^{ten} Grades sei

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots \pm f_n = 0,$$

wo $f_2, \ldots; f_n$ irgend welche ganzzahlige Werthe haben sollen, nur $f_n = 0$ ausgeschlossen, f_1 dagegen als Veränderliche angenommen wird. Die n Wurzeln der Gleichung sind dann Functionen von f_1. Für sehr große Werthe von f_1 wird eine der Wurzeln sehr groß, und ihr reciproker Werth läßt sich in eine Potenzreihe von negativen Potenzen von f_1 entwickeln, deren Coefficienten ganze Zahlen sind. Man erkennt dies sogleich, wenn man $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{f_1} = v$ setzt und u und v in die Gleichung einführt, welche alsdann auf die Form gebracht werden kann:

$$v - u + f_2 v u^2 - f_3 v u^3 + \cdots \pm f_n v u^n = 0.$$

Die übrigen $n-1$ Wurzeln werden für sehr große Werthe von f_1 sehr klein. Sie lassen sich durch eine einzige Potenzreihe von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ darstellen, welche für die $n-1$ conjugirten Werthe von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ die $n-1$ Wurzeln liefert. Die Coefficienten der Potenzreihe sind rationale Zahlen. Man erhält sie, wenn man die Gleichung zunächst in der Form schreibt:

$$x^n v - x^{n-1} + f_2 x^{n-2} v - \cdots \pm f_n v = 0.$$

Die Form der Gleichung zeigt, daß sich v nach positiven Potenzen von x entwickeln läßt. Die Entwicklung fängt an mit dem Gliede $\pm f_n^{-1} x^{n-1}$, so daß also $\pm f_n v$ gleich einer Potenzreihe von x wird, welche mit dem Gliede x^{n-1} beginnt und nur rationale Coefficienten

enthält. Demnach wird $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ gleich einer Potenzreihe von x, welche mit dem Gliede x anfängt und mithin kann x als Potenzreihe von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ mit rationalen Coefficienten entwickelt werden.

Ich bezeichne für große Werthe von f_1 diejenige Wurzel der Gleichung, welche zugleich mit f_1 sehr groß wird mit x_1, die übrigen Wurzeln mit $x_2, x_3, \ldots x_n$. Die letzteren vertauschen sich cyklisch, wenn f_1 einen sehr großen Kreis um den Nullpunkt beschreibt. Denn es vertauschen sich dadurch die $n-1$ Werthe von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ cyklisch. Die Bezeichnungen $x_2, x_3, \ldots x_n$ sollen so an die Wurzeln vertheilt sein, daß bei dieser cyklischen Vertauschung x_2 in x_3, x_3 in x_4, etc., x_n in x_2 übergeht.

Es sei $g(x_1, x_2, \ldots x_n)$ eine unsymmetrische ganze ganzzahlige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$. Dann ist g eine algebraische Function von f_1. Setzt man nun für $x_1, x_2, \ldots x_n$ die gefundenen Entwicklungen nach Potenzen von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ ein, so erhält man für g eine Entwicklung nach Potenzen von $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$, welche solche Werthe von g darstellt, die großen Werthen von f_1 entsprechen. Hat nun die algebraische Function g für denselben Werth von f_1 außer den durch diese Entwicklung dargestellten noch andere Werthe, so folgt nach dem von mir im Crelle'schen Journal Bd. 100 S. 432 bewiesenen Satze, daß es nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von f_1 giebt, für welche g einen ganzzahligen Werth annimmt. Werden andrerseits alle Werthe von g durch die Entwicklung geliefert, so kann g nicht mehr als $n-1$ Werthe haben.

Nimmt man nun weiter an, daß die Gleichung

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots \pm f_n = 0$$

für die angenommenen Werthe von $f_2, \ldots f_n$ und veränderliche Werthe von f_1 keinen Affect besitzt, so kann, wenn $n > 4$ vorausgesetzt wird, eine unsymmetrische ganzzahlige Function der Wurzeln, welche weniger als n Werthe hat, nur zweiwerthig sein, und es kann daher nur eine endliche Anzahl ganzzahliger Werthe von f_1 geben, für welche die Gleichung einen stärkeren Affect als die Rationalität der Discriminante annimmt.

Es bleibt noch übrig zu beweisen, daß $f_2, \ldots f_n$ einer gewissen Gleichung genügen müssen, wenn die Gleichung

$$x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots \pm f_n = 0$$

bei veränderlichem f_1 einen Affect besitzen soll.

Man kann zunächst zeigen, daß kein Affect vorhanden sein

kann, sobald es einen einfachen Verzweigungspunkt der algebraischen Function x von f_1 giebt. Es werde die n blättrige Riemann'sche Fläche über der f_1 Ebene betrachtet. Da unsere Gleichung für veränderliches f_1 irreducibel ist, so muß die Riemann'sche Fläche zusammenhängend sein. Es sei a ein Werth von f_1, für welchen die Entwicklungen von $\frac{1}{x_1}, x_2, \ldots x_n$ nach Potenzen von v und $\sqrt[n-1]{\pm f_n v}$ convergiren. Dann ist x_1 für diesen Werth definirt und es soll der zu a und x_1 gehörige Punkt der Riemann'schen Fläche mit A bezeichnet werden. Es sei B ein einfacher Verzweigungspunkt und AB ein Weg, auf dem man von A zu B gelangt. Läßt man nun f_1 auf diesem Wege bis dicht vor B wandern, B umkreisen und wieder zu A zurückkehren, so wird x_1 dadurch mit einer der Wurzeln $x_2, \ldots x_n$ z. B. x_k vertauscht, während alle anderen Wurzeln ungeändert bleiben. Da man nun aus der cyklischen Vertauschung von $x_2, x_3, \ldots x_n$ und der Vertauschung von x_1 und x_k alle Vertauschungen von x_1 mit $x_2, \ldots x_n$ und in Folge dessen alle $n!$ Substitutionen der n Wurzeln zusammensetzen kann, so ist erwiesen, daß unsre Gleichung für diesen Fall keinen Affect besitzt.

Welche Bedingungen müssen nun $f_2, \ldots f_n$ erfüllen, damit ein einfacher Verzweigungspunkt vorhanden sei.

Es ist

$$f_1 = x + f_2 x^{-1} - f_3 x^{-2} \ldots \pm f_n x^{-n+1}.$$

Für einen einfachen Verzweigungspunkt muß $\frac{df_1}{dx}$ verschwinden, $\frac{d^2 f_1}{dx^2}$ dagegen von Null verschieden sein.

Die Bedingungen, daß kein einfacher Verzweigungspunkt existirt, sind demnach die folgenden. Es muß für alle Wurzeln der Gleichung

$$\frac{df_1}{dx} = 1 - f_2 x^{-2} + 2 f_3 x^{-3} + \cdots \pm (n-1) f_n x^{-n} = 0$$

der Ausdruck

$$2 f_2 x^{-3} - 2 \cdot 3 f_3 x^{-4} + \cdots \pm n \cdot n-1 f_n x^{-n-1}$$

gleich Null sein.

Setzt man $\frac{1}{x} = u$ und schreibt

$$\frac{df_1}{dx} = 1 - f_2 u^2 + 2 f_3 u^3 \cdots \mp (n-1) f_n u^n = \varphi(u),$$

so muß also für jede Wurzel von $\varphi(u) = 0$ auch $\varphi'(u)$ verschwinden, oder, was dasselbe ist, es muß jede Wurzel von $\varphi(u) = 0$ mindestens eine zweifache sein. Die Werthsysteme von $f_1 \ldots f_n$, welche dieser Bedingung genügen, bilden offenbar ein algebraisches Gebilde, dessen Mannigfaltigkeit nicht größer ist als $\frac{n-1}{2}$; denn das ist die höchste Zahl der Wurzeln von $\varphi(u) = 0$, welche beliebig angenommen werden können.

Ueber die Erregbarkeit sensibler Nervenendigungen durch Wechselströme.

Von

Dr. **R. v. Zeynek.**

Aus dem Universitätsinstitut für physikalische Chemie in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Februar 1899 von W. Nernst.

Was von Gesetzen der Nervenerregung bekannt ist, wurde fast ausnahmslos durch Versuche, die mit Hilfe des elektrischen Stromes an motorischen Nerven angestellt worden sind, gewonnen. In der Regel wurde in der Weise verfahren, daß eine Strecke im Verlaufe eines Nerven freigelegt und an zwei Stellen elektrisch gereizt wurde; als Maß der Erregung wurde die Zuckungsgröße des zugehörigen Muskels bestimmt.

Gegen systematische Versuche, sensible Nerven vom peripheren Nervenende aus zu reizen, bestand seit jeher eine ziemliche Abneigung; vor allem wohl aus Furcht, Irrtümern in der Deutung der Resultate ausgesetzt zu sein. Zwei Fehlerquellen wurden besonders gefürchtet: 1) die Richtung, in welcher der elektrische Strom den Nerven durchquert, unbewußt zu ändern; 2) einen unrichtigen Wert der Stromstärke in die Rechnungen einzuführen, da die Annahme allgemein verbreitet war, schnelle elektrische Schwingungen vertheilten sich an der Körperoberfläche, ohne in die Tiefe zu dringen.

Der zweite Punkt wurde durch W. Nernst, „Ueber die Verwendung schneller Schwingungen in der Brückencombination", Wied. Ann. 60, S. 600 hinfällig; gleichzeitig wurde in dieser Arbeit (S. 615) eine Theorie angedeutet, die Nervenerregung durch

den elektrischen Strom auf Grund der Jonenbeweglichkeit zu erklären. Daraufhin konnten elektrische Versuche an sensiblen Nervenenden mit der Hoffnung auf Erfolg vorgenommen werden. Die in Punkt 1 erwähnte Gefahr dürfte durch eine zweckmäßige Versuchsanordnung zu vermeiden sein.

Ich stellte mir die Aufgabe, die minimale Stromstärke zu finden, bei welcher Sinusströme verschiedener Frequenz wahrgenommen werden. Für motorische Nerven ist von v. Kries[1]) die gleiche Frage bearbeitet. Ueber die Wirkung von Sinusströmen auf periphere Nervenenden fand sich nur eine Bemerkung d'Arsonvals[2]), daß mit der Zunahme der Wechselzahl auch eine größere Stromstärke zur Erregung der Nerven nöthig sei. So schien es nicht überflüssig zu sein, eine systematische Untersuchung zur Lösung der erwähnten Aufgabe auszuführen. Die im Folgenden beschriebenen Versuche dürften auch insoweit Interesse beanspruchen, als es thunlich ist, aus der zur Nervenerregung nothwendigen Stromstärke einen Schluß zu ziehen auf die Wirkungen, welche starke Wechselströme verschiedener Frequenz auf den Organismus ausüben.

Versuchsanordnung.

Um bei den Versuchen, die Nerven von den peripheren Endorganen aus zu reizen, vergleichbare Resultate zu erhalten, ergab sich als erste Aufgabe, durch die Versuchsanordnung zu erzielen, daß das Versuchsobject innerhalb der Zeit einer Versuchsreihe, d. h. einiger Stunden, von den gleichen Stromlinien durchflossen wird.

Die Stromvertheilung im Organismus muß — wenn von dauernden Veränderungen der Gewebe infolge der Stromwirkungen abgesehen werden kann — abhängig gedacht werden von der Structur resp. der Leitfähigkeit der Gewebe. Solche Veränderungen (Oedem, Ermüdung der Nerven etc.) waren in der durchströmten Körperpartie thatsächlich weder während der Versuche, noch nach denselben zu constatiren, sodaß die Beschaffenheit der Gewebe für die Zeit einer Versuchsreihe als unveränderlich angenommen werden konnte. Ebenso mußte auf die gleichbleibende Beschaffenheit der Epidermis an den Stellen, welche der Strom durchsetzen sollte, geachtet werden.

Als Versuchsobject dienten zwei benachbarte Finger. Die mit

1) Verhandlungen d. naturw. Vereins in Freiburg i. B.
2) Arch. de physiologie 1889, S. 246. Bd. VIII.

Seife und Wasser solange, bis sie von Wasser gut benetzt wurden, gewaschenen Finger wurden in zwei cylindrische, etwa 3 cm tiefe, mit 0.7 %iger Steinsalzlösung gefüllte Ausbohrungen einer dicken Paraffinplatte gehalten. Die Cylinderflächen der Paraffinnäpfe waren mit Kupferblechen ausgekleidet, welche mit der Stromquelle in Verbindung standen. Die Fingerstellung war bei den Versuchen wie die Höhe, bis zu welcher die Finger benetzt wurden, immer die gleiche. Durch diese Anordnung konnte angenommen werden, daß die Empfindung zum größten Theil durch die Reizung der Nervenenden bedingt war. Die Versuche wurden erst begonnen, wenn die Steinsalzlösung die Temperatur der Finger angenommen hatte, ferner wurde sorgsam darauf geachtet, daß keine Stelle der Fingerhaut, die in die Salzlösung tauchte, verletzt war.

Hautverletzungen, wie sie z. B. unter dem Nagel leicht vorkommen, verrieten sich übrigens gleich beim Beginn der Versuche: bei bedeutend geringeren Stromstärken, als nothwendig sind, um das charakteristische Prickeln hervorzurufen, tritt in der verletzten Partie eine Schmerzempfindung auf, welche an jene erinnert, die verdünnte Säuren hervorbringen.

Für die systematischen Versuche kamen Sinusströme zur Verwendung, die für langsamen Wechsel (0.3—1 pr. Sec.) von einer Spule geliefert wurden, in welcher sich eine zweite von Gleichstrom durchflossene Spule gleichmäßig drehte. Der erhaltene Wechselstrom wurde zum Ausgleich eventueller Unregelmäßigkeiten noch durch einen Transformator geleitet und von diesem abgenommen. Für Stromwechsel von 5—110 pr. Sec. diente ein Kohlrausch'scher Sinusinductor; für Wechselströme von cca. 600—5000 Stromwechsel pr. Sec. eine nach Herrn Potter's Plänen im hiesigen Institute construirte Dynamo, deren Strom noch durch einen Transformator geleitet wurde. Orientirende Versuche wurden mit Gleichstrom, ferner mit Strömen angestellt, welche ein kleiner Ruhmkorff'scher Inductor mit Neef'schem Hammer und ein Saitenductor mit dickdrähtiger Wickelung lieferten. Sehr schnelle Schwingungen wurden schließlich durch eine Teslacombination erreicht.

Zur Messung der Stromstärken dienten das Maltby'sche[1]) Elektrometer und Weber's Dynamometer. Die Teslaschwingungen wurden mittels eines Hitzdrahtgalvanometers gemessen.

Die Schaltungsweise wird durch beifolgende Figuren erläutert.

---

1) Wied. Ann. 61, 568 (1897).

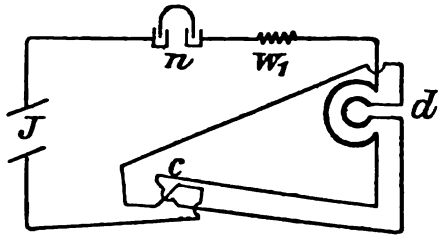


Fig. 1.

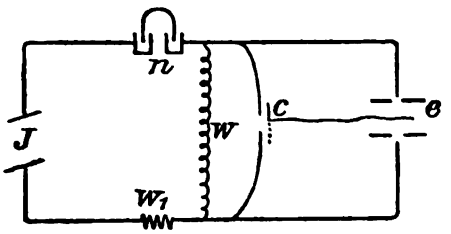


Fig. 2.

ad Fig. 1. Der Experimentirstrom gieng von J durch einen Stromkreis, gebildet aus den Paraffinnäpfen n, in welchen durch die Finger der Contact hergestellt war, aus dem Mannit-Borsäurewiderstand w und einem gleichbeschaffenen Widerstand w_1. Von dem Widerstand w war der zum Elektrometer führende Stromtheil abgezweigt, indem die Elektrometerquadranten kreuzweise mit je einem Pol verbunden waren und eine commutirbare Zweigleitung (c einpoliger Commutator) zum Biscuit des Elektrometers führte. Als Dielektricum des Elektrometers wurde Benzol verwendet; die Ablesung des commutirten Ausschlages geschah mit Spiegel und Fernrohr. w betrug 20—30.000 Ω. w_1 war ein Regulirwiderstand zwecks Einstellung auf den Schwellenwert der Nervenempfindung. Die Aichung des Elektrometers erfolgte vor und nach jeder Versuchsreihe mit Gleichstrom.

Aus der Größe des Ausschlages konnte so das mittlere Integral der Stromstärke gefunden werden, da der durch n und w circulirende Strom von der mittleren Stromstärke i an den beiden Enden des Widerstandes w die Spannung $iw = e$ besitzt; für die Spannung ε eines Gleichstromes wurde der Elektrometerausschlag $= a$ gefunden, für die Spannung $= 1$ daher der Ausschlag $= \frac{\sqrt{a}}{\varepsilon}$ berechnet. Daraus ergibt sich für e, für welches der commutirte Elektrometerausschlag b betragen haben mag:

$$e = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\varepsilon, \text{ für } i = \frac{\sqrt{b}\,.\,\varepsilon}{\sqrt{a}\cdot w}.$$

Daß die gefundene Stromstärke ebensowenig die zur Nervenerregung nothwendige absolute Stromstärke ist, wie bei den mit motorischen Nerven angestellten Versuchen, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

ad Fig. 2. Von J geht der Strom durch die Paraffinnäpfe n, durch den elektrolytischen Regulirwiderstand w_1 und durch die bewegliche Spule des Dynamometers d, aus welcher der Eisenkern

entfernt war; von da zu einem Commutator c, mittelst dessen die Stromrichtung der fixen Spule des Dynamometers commutirbar ist, hierauf durch die fixe Spule von d nach J zurück. Die Aichung des Dynamometers wurde mit Gleichstrom ausgeführt. Die Stromstärken wurden nach der Formel[1]) $i = C\sqrt{a}$ bestimmt.

Bei den Wechselströmen von höheren Wechselzahlen wurde fast ausschließlich das Dynamometer verwendet.

Wegen der gringen Dämpfung konnte nur selten die Ruhelage der Spule direct bestimmt werden.

Versuchsergebnisse.

Zur Orientirung wurde ein Versuch angestellt, welche Stromstärke bei Verwendung von Gleichstrom unter den mitgetheilten Bedingungen nothwendig sei, um eine Empfindung zu veranlassen. Der Versuch ergab eine Stromstärke von 70.2×10^{-5} Amp.

Da die Reizerscheinung eine von dem bekannten Prickeln verschiedene ist, sei dieses Ergebnis nur beiläufig mitgetheilt. —

Bei den verwendeten Wechselströmen konnte eine Verschiedenheit in der Erscheinung des Prickelns nicht constatirt werden. Es liegt keine Veranlassung zu einer Befürchtung vor, daß verschiedenartige Nervenenden als Indicatoren verwendet worden wären, was ja auch der Lehre von den specifischen Energieen widerstrebte. Da für die Werte, welche bei Wechselströmen bis 100 Stromwechsel pr. Sec. erhalten wurden, ausgesprochene Mittelwerte schwer zu fixiren waren, andererseits bei den geringen Ausschlägen die Ablesungsfehler (schon merklich) in Betracht kommen, so sind die erhaltenen Werte ohne Correcturen mitgetheilt. Die Werte der übrigen Versuchsreihen differirten im Maximum um etwa 20 % voneinander. Diese Differenzen dürften wohl auf Unterschiede in der Dicke der Haut, in der Zahl der gereizten Nerven, und auf einen verschiedenen Flüssigkeitsgehalt der Gewebe zu beziehen sein; weniger wahrscheinlich auf Aenderungen in der chemischen Zusammensetzung der Nervensubstanz. Es gelang leicht, die für die höheren Wechselzahlen gefundenen Werte der Stromstärken auf einen Einheitswert, resp. auf das Niveau der durch mehrere übereinstimmende Versuche gefundenen Curve zu beziehen.

---

1) Kohlrausch, Leitfaden d. prakt. Physik, 1896, S. 296.

A. Ablesungen mittels des Elektrometers.

Wechselzahl Sec.	Amp. × 10^{-8}	Wechselzahl Sec.	Amp. × 10^{-8}	Wechselzahl Sec.	Amp. × 10^{-8}
13	6.9	57	18.55	Ruhmkorff	
18.5	8.2		18.98	hoher Ton	
20	8.64	66	20.0	d. Unter-	
27	12.99	68	21.16	brechers	29.09
	9.86	69	21.16	rasselnd	17.60
30	12.65	70	21.91		
	10.23		20.39	mittlerer	25.20
	10.59	71	21.91	Ton	26.22
33	13.56	77	21.21	Saiteninductor mit dickdrähtiger Wickelung	21.30
	13.11	83	21.54		20.0
37.5	14.47	87	21.54		21.98
40	15.92	90	22.98		21.10
	14.2		22.62		19.75
	13.8		23.66		
43	17.89			stark rasselnd	16.13
	16.97		24.33		
	17.66	100	24.33		
47	18.33		24.98		
48.4	18.76	105	25.92		
50	18.47	1875	73.2		
	17.87		74.4		
	16.74	3300	96.0		
	17.62	3600	102.5		
	16.63	4000	109		
	19.18	5000	117		
	17.89				

B. Ablesungen mittels des Dynamometers.

Wechselzahl Sec.	Amp. × 10^{-8}	Auf das Niveau der Curve reduc. Wert	Reductionsfactor
110	27.7	25.5	
920	56.6	52.1	
1030	61.7	56.8	
	59.9	55.1	
1120	64.6	59.4	0.92
1285	66.4	61.1	
1350	67.5	62.1	
1400	68.0	62.6	
1430	68.0	62.6	

Wechselzahl / Sec.	Amp. $\times 10^{-5}$	Auf das Niveau der Curve reduc. Wert	Reductionsfactor
100	25.3	25.3	
1980	75.8	75.8	
2140	79.2	79.2	1.00
2850	86.0	86.0	
3690	102.6	102.6	
66	18.0	19.9	
857	47.3	52.5	1.108
1840	64.6	71.7	
857	48.1	50.3	
1600	64.6 64.1	67.6	
3430	88.9	93.0	1.046
3950	89.8 94.6	96.4	
4280	97.4	101.9	
5140	102.6	107.3	
950	59.9	53.9	
1285	72.8	65.5	
1710	78.5	70.7	0.9
1840	76.8	69.1	
2140	90.6	81.5	
2340	95.8	86.2	
800	45.7	47.1	
950	47.3	48.7	1.03
1070	54.6	56.2	
1610	66.8	68.8	
571	43.2	43.2	
830	52.6	52.6	
1200	60.5	60.5	1.00
1846	72.8	72.8	
3660	94.6	94.6	
1170	53.9	58.8	1.092
2570	80.6	87.9	

Wechselzahl / Sec.	Amp. $\times 10^{-5}$	Wechselzahl / Sec.	Amp. $\times 10^{-5}$
0 (Gleichstrom)	70.2	32	12.6
0.3	12.2	44	15.1
0.6	10.6	75	22.4 21.5
0.75	8.6		
1	10.6	84	23.2
5.3	5.78	100	25.3
12	8.19		

Analoge Versuche wurden mit Teslaschwingungen ausgeführt. Die Unterbrechung des Primärstromes geschah durch eine rasch rotirende Wasserturbine. Als Funkenstrecke waren Zinkkugeln eingeschaltet, zwischen denen etwa 30—150 Funken pr. Sec. übersprangen, die Stromstärke wurde mittels eines Hitzdrahtgalvanometers bestimmt.

Die Versuche haben jedoch bisher kein sicheres Resultat ergeben. Bei langsamem Funkenspiel wurde in einzelnen Fällen ein Prickeln beobachtet, doch setzte dieses viel heftiger ein und ließ sich nicht für die Grenze der Fühlbarkeit einstellen. Es kam bei diesen letzteren Versuchen mit langsamem Funkenspiel auch vor, daß bei einer Stromstärke, die eine Zeit lang keine Reaction gab, plötzliche Zuckungen hervorgerufen wurden, sodaß der Verdacht naheliegt, diese seien als superponirt aufzufassen. Bei einer Schwingungszahl von einigen Millionen (aus Selbstinduktion und Kapacität geschätzt) trat mehrmals ein deutliches Prickeln bei ca. $^1/_{20}$ Ampère ein, doch waren die Resultate, wie erwähnt, recht unregelmäßig.

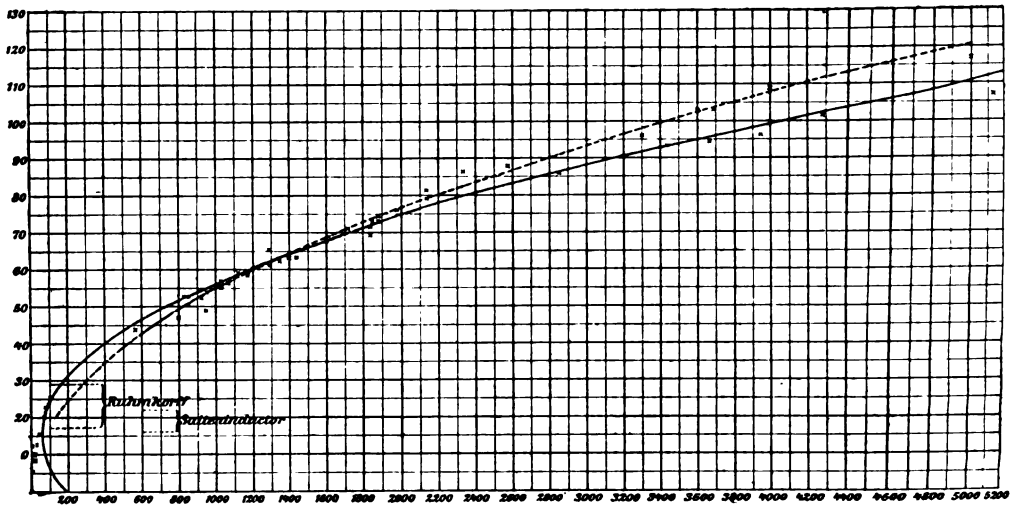
Eine Beobachtung von Interesse ist bei diesen Versuchen gemacht worden: obwohl keine der uns geläufigen physiologischen Stromwirkungen bei der Mehrzahl dieser Versuche auftrat, war eine deutliche Erwärmung der beiden zum Versuch verwendeten Finger zu spüren; diese rührt offenbar von Joule'scher Wärme her. Es dürften die Teslaschwingungen das einzige Mittel sein, eine gleichmäßige Durchwärmung des Körpers zu ermöglichen. Wie sich leicht berechnen läßt, kommen dabei ganz bedeutende Wärmemengen in Betracht.

Eine Zusammenstellung der gewonnenen Werte ist in der beiliegenden Kurvenzeichnung durchgeführt. In dieser ist die Wechselfrequenz als Abscisse, die dabei zur Nervenerregung nothwendige (mittlere) Stromstärke als Ordinate aufgetragen.

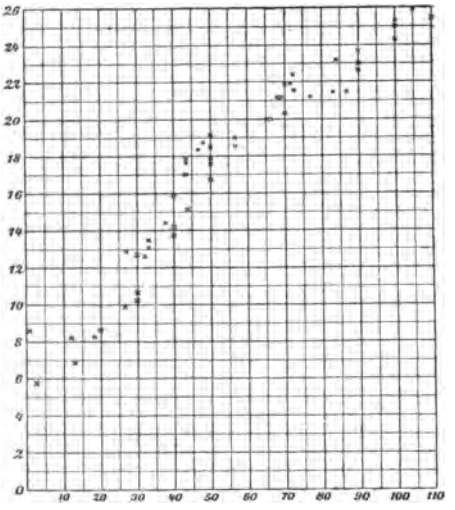
Die Werte, welche bis zur Wechselzahl von 100/Sec. erhalten sind, wurden in analoger Weise, aber unter Zugrundelegung eines anderen Maßstabes dargestellt.

Welche Form die Welle haben mag, die im Nerven die Fortpflanzung der Erregung zum Centrum bewirkt, soll hier nicht erörtert werden. Diesbezüglich kann auf die Arbeiten von Boruttau und Hoorweg verwiesen werden.

Aus der Betrachtung der durch Verbindung der Einzelwerte in Fig. 3 und 4 construirbaren Curven ergibt sich, daß dem Gleichstrom und den Sinusströmen, deren Frequenz eine geringe ist, in Bezug auf ihre Fähigkeit sensible Nerven zu erregen, eine ganz



Figur 3.



Figur 4.

andere Rolle zufällt als den frequenteren Sinusströmen. Aus den Werten in Fig. 3 läßt sich — wenn von der unteren eben charakterisirten Partie der Curve abgesehen wird — mit großer Annäherung eine Parabel (ausgezogen gezeichnet) construiren, welcher im Maßstabe der Zeichnung die Gleichung zukäme

$$(y-15)^2 = 1.82\ (x-45).$$

Für schnellere Schwingung gilt mit guter Annäherung die einfachere Gleichung, deren Curve in Fig. 4 punktirt gezeichnet ist,

$$y^2 = 2{,}90\ x.$$

Leider sind bei den Curvenzeichnungen von v. Kries (Verhandl. d. naturw. Vereins Freiburg i. B., Bd. VIII, S. 170) nicht die Werte der Stromstärken angegeben; falls diese höher waren, als die wahren Stromstärken, welche bei den beschriebenen Versuchen die Nervenenden im Körper durchsetzten, ist es erklärlich, daß v. Kries das Minimum seiner Curven bei einer Wechselzahl von etwa 100 Sec. fand.

Zur Theorie der elektrischen Reizung.

Von

W. Nernst.

Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Februar 1899.

Im organisirten Gewebe bringt der galvanische Strom zweierlei Wirkungen hervor; er entwickelt Joule'sche Wärme, wie in gewöhnlichen Leitern und veranlaßt physiologische Reizerscheinungen. Die letztere Wirkung tritt so sehr in den Vordergrund, daß sie bisher wohl ausschließlich beobachtet worden ist; aber in der vorstehenden Notiz findet sich der interessante Nachweis, daß bei geeigneter Versuchsanordnung auch der umgekehrte Fall eintreten kann.

Ich möchte im Folgenden den Versuch machen, die Theorie der elektrischen Reizung zu entwickeln, wie sie sich mir mit Nothwendigkeit aus den jetzigen Anschauungen der elektrolytischen Leitung zu ergeben scheint.

Nach unsern bisherigen Kenntnissen kann der galvanische Strom im organisirten Gewebe, also einem Leiter rein elektrolytischer Natur, keine anderen Wirkungen, als Ionenverschiebungen, d. h. Konzentrationsänderungen, verursachen; wir schließen also, daß letztere die Ursache des physiologischen Effekts sein müssen. Bei Wechselströmen, mit denen wir uns hier hauptsächlich beschäftigen wollen, treten Konzentrationsänderungen in mit der Richtung des Stromes wechselndem Sinne auf. Wenn ihr Mittelwerth einen bestimmten Betrag erreicht, wird die physiologische Wirkung merklich werden, d. h. die Reizschwelle ist erreicht.

Es scheint nun möglich, diese mittleren Konzentrationsänderungen zu berechnen, ohne gar zu spezielle Vorstellungen zu Hülfe nehmen zu müssen. Es ist bekannt, daß im organisirten

Gewebe die Zusammensetzung der wässerigen Lösung, die den elektrolytischen Leiter bildet, nicht überall die gleiche ist, und insbesondere ist sie innerhalb und außerhalb der Zellen verschieden. Halbdurchlässige Membrane verhindern den Ausgleich durch Diffusion; nur an diesen Membranen können Konzentrationsänderungen durch den Strom erzeugt werden, während bekanntlich im Innern einer Lösung von überall gleicher Zusammensetzung der Strom eine solche Wirkung nicht hervorbringen kann, weil in jedes Volumelement in jedem Augenblick ebensoviel Ionen hinein- wie hinauswandern.

An den halbdurchlässigen Membranen hingegen müssen Konzentrationsänderungen auftreten, weil der Strom daselbst Salz hintransportirt, dessen weiteren Transport die Membran verhindert. Salze, welche die Membran zu passieren im Stande sind, übernehmen die Stromleitung durch die Membran. Hier also ist offenbar der Sitz der elektrischen Reizung zu suchen[1]).

Wenn nun ein Strom von der Dichtigkeit eins die Salzmenge v an die Membran transportirt, so wird gleichzeitig infolge Diffusion eine Rückwanderung des Salzes eintreten; die mittlere Konzentrationsänderung an der Membran wird also bedingt durch die entgegenwirkenden Effekte des Stromes und der Diffusion.

Die Gleichungen dieser Prozesse sind leicht zu entwickeln; betrachten wir einen Wechselstrom von der Intensität

$$(1) \qquad \iota = a \sin mt,$$

worin a die Amplitude des Stromes, t die variable Zeit und $\frac{m}{2\pi}$ die Anzahl Wechsel pro Sekunde bezeichnet, so bringt dieser Strom in der Zeit dt die Menge $(va \sin mt)\,dt$ Salz an die Membran, die aus der unmittelbaren Nähe derselben durch den Diffusionsstrom sofort in die benachbarten Schichten zurückgeführt werden muß, weil ja andernfalls in der allernächsten Nähe der Membran unendlich große bez. unendlich kleine Konzentrationen (je nach der Stromesrichtung) auftreten müßten. Bezeichnet x die Richtung des durch den galvanischen Strom bedingten Salzstromes und die damit gleiche, aber entgegengesetzte des Diffusionsstromes, so gilt für $x = 0$, d. h. für die nächste Nähe der

1) Es ist vielleicht nicht ausgeschlossen, daß elektrostatische Ladungen an den halbdurchlässigen Membranen, auf die zuerst Ostwald (Zeitschr. physik. Chem. 6 71, 1890) hingewiesen hat, ebenfalls Reizerscheinungen ausüben; da diese aber mit den Konzentrationsveränderungen parallel gehen, so brauchen wir sie hier nicht weiter zu berücksichtigen.

Membran, wenn wir x von der Membran aus zählen,

$$va \sin mt = -k\frac{\partial c}{\partial x}, \tag{2}$$

worin k den Diffusionskoefficienten, $-k\frac{\partial c}{\partial x}$ also die Dichtigkeit des Diffusionsstromes bezeichnet.

In hinreichender Entfernung von der Membran bleibt die Konzentration ungeändert, d. h. es ist

$$c = c_0 \text{ für } x = \infty. \tag{3}$$

Ueberall gilt die bekannte Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{4}$$

welche nichts anderes aussagt, als daß in jedem Volumelement die Konzentration um soviel wächst, als der Ueberschuß der hineingewanderten über die hinausgewanderte Menge beträgt [1]).

Die obigen Gleichungen (1) bis (4) sind im Prinzip genau dieselben, zu denen kürzlich Herr Warburg [2]) in seiner bekannten Theorie der Polarisierbarkeit von Elektroden durch Wechselstrom infolge von Konzentrationsänderungen an den Elektroden gelangte; es spielt eben, wie wir sehen, die halbdurchlässige Membran in mancher Hinsicht die Rolle einer in die Strombahn geschalteten Elektrode (eines sogenannten Zwischenleiters). Herr Warburg findet das Integral obiger Gleichungen für den stationären Zustand zu

$$C - c_0 = -\frac{av}{\sqrt{k}\sqrt{m}}, \tag{5}$$

worin C die Konzentration in unmittelbarer Nähe der Membran (d. h. für $x = 0$) bedeutet. $C - c_0$ müßte nach unsern obigen Betrachtungen also die physiologische Reizung bedingen; damit eine solche überhaupt auftritt, muß $C - c_0$ einen gewissen absoluten Betrag A erweisen. Wir finden also als Bedingung für einen

---

1) Davon, daß, nachdem der Elektrolyt durch den Strom inhomogen geworden ist, nunmehr letzterer auch seinerseits Konzentrationsänderungen erzeugt (vgl. dazu besonders F. Kohlrausch, Wied. Ann. 62 p. 209, 1897), können wir hier als einer Wirkung zweiter Ordnung absehen.

2) Verhandl. physik. Ges. Berlin vom 20. Nov. 1896. Die obigen Gleichungen dürften auch für die Untersuchung der Polarisationserscheinungen im organisirten Gewebe neue Anhaltspunkte liefern.

physiologischen Effekt

$$A \geqq \frac{av}{\sqrt{k}\sqrt{m}}. \tag{6}$$

Nun ist a der Intensität des angewandten Wechselstroms proportional; nach unserer Theorie muß also die Stromintensität, die gerade noch einen Reiz ausübt, mit der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl direkt proportional ansteigen.

Aus der vorstehenden Notiz des Herrn Dr. Zeynek geht nun nicht nur hervor, daß in qualitativer Hinsicht die Erfahrungen dafür sprechen, daß mit wachsender Wechselzahl dieser Grenzstrom ansteigt, sondern die für höhere Wechselzahlen gültige Formel

$$y^2 = 2{,}90\,x \text{ oder } a^2 \text{ prop. } m \tag{7}$$

lehrt sogar, daß auch quantitativ im Sinne der Theorie dies Ansteigen der Quadratwurzel proportional erfolgt.

Für langsame Schwingungen (unter ca. 500) wird Formel (7) ungenau und für sehr langsame (unter ca. 30) versagt sie völlig. Aber die Theorie läßt auch dies vorhersehn. Denn die Bedingung, daß die Konzentrationswellen in einiger Entfernung von der Membran schon abgeklungen sind (wir setzten bei der Integration für $x = \overline{\infty}$ ja $c = c_0$), wird unstatthaft, wenn die Länge der Konzentrationswellen mit den Dimensionen einer Zelle kommensurabel werden, wenn also die Frequenz des Wechselstroms zu gering wird.

Betrachten wir zur Erläuterung dessen den extremen Fall einer unendlich kleinen Frequenz, d. h. den des konstanten Stromes. Es seien c_1 und c_2 die Konzentrationen, die im stationären Zustande an zwei an der Zellwand im Abstande l gegenüberliegenden Punkten einer stromdurchflossenen Zelle herrschen. Dann gilt (mit einer gewissen Annäherung):

$$w = \frac{k(c_2 - c_1)}{l}; \quad \frac{c_1 + c_2}{2} = c_0\,^{1}).$$

Maaßgebend für den physiologischen Effekt wird der absolute Betrag von $c_1 - c_0 = c_0 - c_2$. Hier aber kommen im Werth von l die absoluten Größen der Zelle in Betracht, sodaß es mir ohne ganz spezielle Vorstellungen über den Zellenbau nicht möglich er-

1) Vgl. hierzu die von meinen Schülern Herren Salomon und Dannegel entwickelten Theorien des Reizstroms, die zu unserm Problem eine entsprechende Analogie aufweisen, wie die Theorie von Warburg.

scheint, die Theorie auch für das Gebiet der langsamen Wechsel zu entwickeln. Bemerkt sei nur noch, daß es hier zur Herstellung des stationären Zustandes offenbar verhältnismäßig großer Zeiträume bedarf und auch aus diesem Grunde liegen hier die Verhältnisse wesentlich anders, als bei schnellem Stromwechsel. Thatsächlich treten nach vorstehender Arbeit bei Gleichstrom wesentlich andersartige Reizerscheinungen ein, als bei Wechselströmen.

Die weitere Entwicklung der Theorie für langsamen Wechselstrom und für Gleichstrom muß ich also in physiologischen Fragen Berufeneren überlassen; doch möchte ich noch der Vermuthung Raum geben, daß das weitere Studium der elektrischen Reizung durch solche Ströme in physiologischer und vielleicht auch in diagnostischer Hinsicht mancherlei neuen Aufschluß geben könnte.

Göttingen, Februar 1899.

Ueber die Proportionalität zwischen den piëzoelectrischen Momenten und den sie hervorrufenden Drucken.

Von

Dr. **Franz Nachtikal.**

Vorgelegt durch W. Voigt in der Sitzung vom 25. Februar 1899.

Die Grundlage der von Herrn Voigt[1]) entwickelten Theorie der piëzoelectrischen Erscheinungen bildet die Annahme, daß die electrischen Momente der Volumeneinheit eines acentrischen Krystalles sowohl mit der Temperatur als mit den Deformationsgrößen bezüglich den Druckcomponenten variiren. Für die Entwickelung der Theorie wird die Specialisirung gemacht, daß diese Momente lineare Funktionen der Deformationsgrößen resp. Druckcomponenten sind, was sicher stattfindet, wenn diese Größen genügend klein sind. Bei den früheren Beobachtungen der Herren J. und P. Curie[2]), P. Czermak[3]), E. Riecke und W. Voigt[4]), bei denen auch nebenher diese Proportionalität geprüft wurde, wurde sie befriedigend bestätigt. Es soll nun durch diese Arbeit untersucht werden, mit welcher Annäherung diese Proportionalität gilt, und wenn Abweichungen davon sich zeigen, in welchem Sinne sie vorkommen.

Da diese Abweichungen nur klein sind, wie das sowohl aus den eben citirten Beobachtungen als auch aus dieser Arbeit hervorgeht, so kann man sie in dem Sinne auffassen, daß man die electrischen Momente proportional den klein gedachten Zuwach-

1) W. Voigt, Gött. Abh. 36 (1890).
2) J. und P. Curie, Compt. rend. 92, p. 186—188 (1881).
3) P. Czermak, Wiener Sitzungsber. Bd. 96, Abth. 2, p. 1217—1244 (1887).
4) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. 45, p. 523—552 (1892).

sen der Drucke setzt, aber die Constanten der Proportionalität als von den Drucken selbst abhängig betrachtet. Dementsprechend sind bei den nachstehend beschriebenen Versuchen nicht die durch verschieden große Drucke erregten Electricitätsmengen gemessen, sondern die durch denselben Druckzuwachs bei verschiedenen Anfangsbelastungen entwickelten. Hierdurch wurde gleichzeitig die Nothwendigkeit einer genauen Calibrirung des Electrometers vermieden.

Was die Beobachtungsmethode selbst betrifft, so sei auf die citirte Arbeit von E. Riecke und W. Voigt hingewiesen. Das Krystallprisma, von dem zwei gegenüberliegende Flächen mit Staniol belegt waren, wurde zwischen zwei mit Hartgummi isolirte Kupferplatten gelegt; die untere Platte war fest, die obere wurde von einer Feder gehalten und durch eine Waagschale und durch darauf gelegte Gewichte belastet. Ein Beleg des Krystalls sowie ein Quadrantenpaar des Thomson'schen Electrometers wurde dauernd zur Erde abgeleitet, der andere Beleg und das andere Quadrantenpaar mit einander so verbunden, daß auch sie durch eine passende Einrichtung leicht zur Erde abgeleitet werden konnten. Die ganze Leitung sowie das Electrometer waren sorgfältig durch Drahtgitter gegen äußere Einwirkungen geschützt; alle Verbindungen waren zusammengelöthet, um die mit den Erschütterungen veränderlichen Capacitäten unvollkommener Contacte zu vermeiden. Die Nadel, deren Schwingungen beobachtet wurden, ward durch eine Batterie von 70 Wasserelementen geladen.

Bei der Berechnung der Ruhelage muß man neben der Dämpfung auch die Verschiebung der Ruhelage berücksichtigen. Diese Verschiebung der Ruhelage ist einerseits durch die Zerstreuung der Electricität wegen der schlechten Isolation, anderseits auch durch die thermische Erregung des Krystalls bewirkt. Da es sich dabei nur um gegen die ganzen Ausschläge der Nadel kleine Größen handelt, so kann man näherungsweise diese Verschiebung proportional der Zeit setzen und damit annehmen, dass die Umkehrpunkte der Nadel in derselben Weise verschoben werden. Die Beobachtungen wurden folgendermaßen eingerichtet: Der isolirte Beleg und das damit verbundene Quadrantenpaar wurden zuerst mit der Erde verbunden; diese Verbindung wurde in dem Moment aufgehoben, wo die Nadel durch ihre Nullstellung durchging, um so die influencirende Wirkung der stark geladenen Nadel auf beiden Quadrantenpaaren möglichst gleich zu erhalten. Darauf wurden vier Umkehrpunkte beobachtet; im Momente des vierten Umkehrpunktes wurde das Uebergewicht auf die Waagschale gelegt und wurden nun fünf Umkehrpunkte beobachtet. Daraus wurde einerseits die ur-

sprüngliche Nullstellung der Nadel andererseits ihre neue Stellung für den Augenblick des Belastens berechnet.

Sei x die Ruhelage in jenem Augenblicke, ξ die Verschiebung der Ruhelage während einer halben Periode, α der erste Ausschlag der Nadel nach dem Durchgange durch die Ruhelage, q das Dämpfungsverhältniß, dann sind die aufeinander folgenden Umkehrpunkte a_n durch folgende Formeln [1]) gegeben:

$$a_1 = x + \xi + \alpha,$$

$$a_2 = x + 2\xi - \frac{\alpha}{q},$$

$$a_3 = x + 3\xi + \frac{\alpha}{q^2},$$

$$a_4 = x + 4\xi - \frac{\alpha}{q^3},$$

$$a_5 = x + 5\xi + \frac{\alpha}{q^4}.$$

Da man nun q als bekannt annehmen kann, so bleiben nach der Elimination von α noch vier Bedingungen für zwei Unbekannte x und ξ. Diese Gleichungen wurden in folgender Weise verwerthet. Zuerst berechnete man die Ruhelagen aus je zwei Umkehrpunkten mittels des Dämpfungsverhältnisses nach dem gewöhnlichen Verfahren:

$$x_2 = a_2 + \frac{a_1 - a_2}{1+q} = x + \xi\left(2 - \frac{1}{1+q}\right)$$

$$x_3 = a_3 + \frac{a_2 - a_3}{1+q} = x + \xi\left(3 - \frac{1}{1+q}\right)$$

$$x_4 = a_4 + \frac{a_3 - a_4}{1+q} = x + \xi\left(4 - \frac{1}{1+q}\right)$$

$$x_5 = a_5 + \frac{a_4 - a_5}{1+q} = x + \xi\left(5 - \frac{1}{1+q}\right).$$

Daraus wurde die Verschiebung der Ruhelage nach den Formeln

$$\xi = \frac{x_4 - x_2}{2} = \frac{x_5 - x_3}{2}$$

zweimal berechnet und aus den Resultaten das Mittel genommen,

1) E. Riecke und W. Voigt, Wied. Ann. 45, p. 533 (1892). In der vorliegenden Arbeit ist nur $\xi, 2\xi, \ldots$ statt $\frac{1}{2}\xi, \frac{1}{2}\xi, \ldots$ gesetzt.

endlich wurde mittels ξ viermal die gesuchte Ruhelage bestimmt und daraus das Mittel genommen, wobei den ersten Zahlen ein größeres Gewicht zugeordnet wurde, als den letzten.

Was das Dämpfungsverhältniß q betrifft, so wurde es immer aus der ganzen Serie der Beobachtungen berechnet; und zwar bestimmte man sogleich $1/(1+q)$, da q nur in dieser Verbindung auftritt. Es ist

$$\frac{1}{1+q} = -\frac{(a_2-a_3)-(a_3-a_4)}{(a_1-a_2)-2(a_2-a_3)+(a_3-a_4)}$$

und auch

$$\frac{1}{1+q} = -\frac{(a_3-a_4)-(a_4-a_5)}{(a_2-a_3)-2(a_3-a_4)+(a_4-a_5)}.$$

Bei der Berechnung zeigte sich, daß der Werth von $1/(1+q)$, welcher aus den ersten vier Umkehrpunkten folgt, kleiner war, als derjenige aus den letzten vier Umkehrpunkten. So ergaben sich z. B. bei der letzten Beobachtung am Turmaline B aus den ersten vier Umkehrpunkten die folgenden Werthe

$$\frac{1}{1+q} = 0{,}4101\ 0{,}4100\ 0{,}4105\ 0{,}4098\ 0{,}4101\ 0{,}4108\ 0{,}4103\ 0{,}4092,$$

dagegen aus den letzten vier Umkehrpunkten

$$\frac{1}{1+q} = 0{,}4128\ 0{,}4123\ 0{,}4129\ 0{,}4115\ 0{,}4134\ 0{,}4115\ 0{,}4131\ 0{,}4120.$$

Die Mittelwerthe sind also

0,4111 und 0,4124.

Dem entsprechend wurden auch die größeren Bogen mit einem kleineren Werthe von $1/(1+q)$ behandelt und umgekehrt. In dem gewählten Beispiele wurden insbesondere folgende Werthe

0,4103 0,4113 0,4123 0,4133

für die aufeinander folgenden vier Bogen benutzt. Das Vorstehende zeigt, daß das Dämpfungsverhältniß für größere Bogen auch größer ist, was übrigens von vornherein zu erwarten war.

Aehnlich wurde auch die Nullstellung der Nadel berechnet. Ist x' die Ruhelage der Nadel gerade v o r der Belastung, so sind

die beobachteten Umkehrpunkte durch folgende Formel

$$\begin{aligned} a_4' &= x' - 3\xi' - \alpha' q^3 \\ a_3' &= x' - 2\xi' + \alpha' q^2 \\ a_2' &= x' - \xi' - \alpha' q \\ a_1' &= x' \qquad + \alpha' \end{aligned}$$

dargestellt. Man berechnete wieder zuerst die Ruhelagen nach dem gewöhnlichen Verfahren

$$x_3' = a_3' + \frac{a_4' - a_3'}{1+q} = x' - \xi'\left(2 + \frac{1}{1+q}\right)$$

. . . . . .

und aus ihnen die corrigirte Ruhelage

$$x' = x_1' + \frac{1}{1+q}\xi' = x_2' + \left(1 + \frac{1}{1+q}\right)\xi' = x_3' + \left(2 + \frac{1}{1+q}\right)\xi'.$$

Die Verschiebung der Ruhelage war in diesem Falle ganz klein, da sie nur von kleinen Temperaturänderungen der Krystalle herrührt.

Die Berechnung selbst wurde immer nach folgendem Schema durchgeführt:

Beob. Umk.-Punkte	Corr. Umk.-Pkte.	Amplit.	Mit $\frac{1}{1+q}$ mult. Amplit.	Ber. Ruhelagen uncorr.	Corr. wegen Verschieb.	Reduc. Ruhelagen	
$a_4' = 528{,}7$							
$a_3' = 507{,}1$		$+21{,}6$	$+\ 8{,}8$	515,9		516,5	
$a_2' = 522{,}4$		$-15{,}3$	$-\ 6{,}3$	516,1		516,45	$x' = 516{,}5$
$a_1' = 512{,}2$		$+10{,}2$	$+\ 4{,}2$	516,4		516,3	
$a_4 = 631{,}3$	630,9						
$a_3 = 544{,}1$	544,1	$+86{,}8$	$+35{,}8$	579,7	4,4	554,1	
$a_2 = 600{,}0$	546,3	$-53{,}7$	$-22{,}2$	574,2	7,2	554,1	$x = 554{,}1$
$a_1 = 556{,}1$	556,1	$+43{,}7$	$+18{,}0$	574,1	1,0	554,1	
$a_3 = 582{,}2$	582,1	$-26{,}0$	$-10{,}7$	571,4	12,2	554,2	

Der Ausschlag ist also 67,6 Sc.-Th. und

$$-\xi = \frac{579{,}7-574{,}1}{2} = 2{,}8, \qquad -\xi = \frac{576{,}9-571{,}4}{2} = 2{,}75.$$

Die einzelnen Beobachtungen stimmen fast immer ebenso gut wie in diesem Beispiele; nur bei dem Turmalin kamen zuweilen kleine Abweichungen vor.

Wie schon gesagt, wurde die von demselben Drucke erregte Electricitätsmenge bei verschiedenen Anfangsbelastungen gemessen. Die Anfangsbelastungen wurden zuerst um gleiche Größen dreimal oder viermal nach einander vergrößert, dann in derselben Weise wieder verkleinert und das Ganze zweimal durchgeführt. So wurden also für jede Anfangsbelastung viermal die Doppelausschläge beobachtet und aus ihnen dann das Mittel genommen. Durch diese Anordnung eliminirt man auch die Aenderung der Empfindlichkeit des Electrometers, welche durch die mit der Temperatur veränderliche Spannung der Wasserbatterie entsteht. Zur Controle wurde übrigens die Empfindlichkeit des Electrometers anfangs, in der Mitte und am Ende jeder Beobachtungsreihe mit einem Normalelemente geprüft. Ihre Veränderlichkeit fand sich immer sehr klein, so daß eine besondere Reduction der Beobachtungen nicht nöthig war.

Nach vielen orientirenden Beobachtungen, durch welche die einzelnen störenden Einwirkungen erkannt und weggehoben wurden, sind endlich Quarz B und Turmaline A und B [1]) je durch zwei Serien von Beobachtungen untersucht. Im folgenden sind die Resultate mit den daraus sich ergebenden Schlüssen zusammengestellt.

Quarz B.

Dieses Präparat ist ein beinahe quadratisches Prisma, dessen Höhe parallel zu einer Nebenaxe des Krystalls liegt und 0,603 cm lang ist; die Querdimensionen messen 0,784 cm und 0,715 cm. Der Druck wurde parallel der Höhe ausgeübt, wobei die dazu senkrechten Flächen mit Staniol belegt waren.

I. Der Krystall wurde anfangs nur dem Drucke der Schale ausgesetzt, der 0,838 kg betrug; die Steigerung dieser Anfangsbelastung betrug immer 3,051 kg. Der Doppelausschlag wurde für eine Zusatz-Belastung von 1,523 kg beobachtet. Der Doppelausschlag für das Normalelement war 216,3 Sc.-Th.

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 536 und 540.

Anfangsbelastung in kg	Beobachtete Doppelausschläge				Mittelwerthe
0,838	133,6	132,1	130,7	131,2	(131,9)
3,889	126,4	126,0	126,4	126,1	126,2
6,940	124,4	123,6	124,8	123,9	124.2
9,991	123,95	122,8	124,0	123,3	123,5

Aus diesen Zahlen geht hervor, daß der piëzoelectrische Modul δ_{11} des Quarzes mit dem steigenden Drucke abnimmt. Jedoch scheint der erste Ausschlag zu groß zu sein, was wahrscheinlich davon kommt, daß der Krystall dabei zu wenig belastet war, daß also noch nicht ganz regelmäßige Vertheilung des Druckes über den ganzen Querschnitt herrschte; auch die beobachteten Doppelausschläge stimmen in diesem Falle noch nicht gut überein. Wenn man deshalb diese Beobachtung ausschließt, so folgt, daß der Vergrößerung des Druckes um 3,051 kg eine Verminderung des ganzen Ausschlages um 1,35 Sc.-Th. oder um 1·1 % entspricht.

II. Der Krystall wurde gleich anfangs der Belastung von 3,355 kg unterworfen; die Steigerung dieser Belastung betrug wieder 3,051 kg. Die Doppelausschläge wurden für den Zusatz-Druck 2,000 kg beobachtet. Für das Normalelement ergab sich ein Doppelausschlag von 216,9 Sc.-Th.

Anfangsbelastung in kg	Beobachtete Doppelausschläge				Mittelwerthe
3,355	174,0	174,0	172,3	174,6	173,7
6,406	173,2	171,7	171,25	172,15	172,1
9,457	171,3	170,25	170,15	169,5	170,3
12,508	169,1	169,7	169,35	169,6	169,4

Der Vergrößerung der Anfangsbelastung um 3,051 kg entspricht also eine Abnahme um 1,53 Sc.-Th., was 0·9 % des ganzen Doppelausschlages beträgt.

Im Mittel nimmt also der piëzoelectrische Modul δ_{11} des Quarzes bei einer Vergrößerung des Druckes um 3,051 kg auf 0,560 cm² um 1,0 % ab. Für die Vergrößerung der Belastung um 1 kg auf

1 cm² beträgt also diese Abnahme 0·16 %. Führt man das absolute Maßsystem ein und benutzt dabei den Werth $\delta_{11} = 6{,}45 \times 10^{-6}$, welchen die Herren E. Riecke und W. Voigt[1]) für die Anfangsbelastung von 4 kg gefunden hatten, so ergiebt sich

$$\delta_{11} = 6{,}54 \times 10^{-6} - 1{,}05 \times 10^{-16}\,\pi,$$

wobei mit π der zugehörige Anfangsdruck bezeichnet ist.

Turmalin A.

Die Höhe dieses Prismas liegt parallel der Hauptaxe des Krystalls und mißt 0,519 cm. Beide dazu senkrechte Flächen, deren Seiten 1,159 cm und 0,595 cm lang sind, waren mit Staniol belegt; der Druck wurde senkrecht zu ihnen ausgeübt.

An diesem Präparate wurden zwei Serien von Beobachtungen ausgeführt; anfangs wurde der Krystall nur dem Drucke der Schale ausgesetzt; die Steigerung der Belastung betrug 1,526 kg. Die Doppelausschläge wurden für die Zusatz-Belastung 1,523 kg bestimmt. Der Doppelausschlag für das Normalelement war bei der ersten Serie der Beobachtungen 221,6 Sc.-Th., bei der zweiten Serie 222,1 Sc.-Th.

	Anfangsbelastung in kg	Beobachtete Doppelausschläge				Mittelwerthe
Erste Serie	0,838	101,4	99,9	101,0	100,2	100,6
	2,364	102,2	101,1	100,3	100,4	101,1
	3,890	101,7	102,2	101,6	101,7	101,8
Zweite Serie	0,838	101,9	100,2	99,9	99,9	100,5
	2,364	102,25	101,8	101,35	101,45	101,7
	3,890	102,5	102,3	102,7	102,6	102,5
	5,416	102,6	102,5	103,3	103,6	103,0

Daraus folgt, daß die Ausschläge für eine Vergrößerung des Druckes um 3,052 kg auf 0,690 cm² im Durchschnitte um 1,5 Sc.-T. zunehmen. Für die Vergrößerung des Belastens um 1 kg auf 1 cm²

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 549.

nimmt also der piëzoelectrische Modul δ_{zz} des Turmalins um 0·30 % zu. Die Formel für δ_{zz} lautet demgemäß im absoluten Maße

$$\delta_{zz} = -5{,}60 \times 10^{-8} - 1{,}77 \times 10^{-10} \varkappa,$$

wenn man wieder den Werth $\delta_{zz} = -5{,}71 \times 10^{-8}$ benutzt, welcher aus den Beobachtungen der Herren E. Riecke und W. Voigt[1]) für die Belastung 4 kg hervorgeht.

Turmalin B.

Dieses Prisma ist aus demselben Turmalin ausgeschnitten, wie das Prisma A; und seine Höhe von 0,537 cm ist ebenfalls der Hauptaxe parallel. Seine Querdimensionen sind 0,892 cm und 0,447 cm. Auch mit diesem Präparate wurden zwei Serien von Beobachtungen durchgeführt. Die Anfangsbelastung betrug im ersten Falle 1,714 kg, im zweiten Falle 0,838 kg, und wurde immer um ungefähr 2 kg gesteigert. Der Doppelausschlag für ein Chromelement war im ersten Falle 214,0 Sc.-Th., im zweiten Falle 217,8 Sc.-Th. Die beobachteten Doppelausschläge entsprechen einem Zusatz-Drucke von 2 kg.

	Anfangsbelastung in kg	Beobachtete Doppelausschläge				Mittelwerthe
Erste Serie	1,714	140,2	139,5	139,5	138,4	139,4
	3,664	140,5	140,1	138,6	139,3	139,6
	5,704	139,9	139,3	139,7	139,1	139,5
Zweite Serie	0,838	139,9	140,0	139,8	139,7	139,85
	2,788	140,1	140,3	141,0	138,6	140,0
	4,828	140,1	140,2	139,9	139,7	140,0
	6,830	140,7	140,8	140,3	140,7	140,6

Auch nach diesen Zahlen, besonders nach der zweiten Serie scheint der piëzoelectrische Modul des Turmalines δ_{zz} mit steigendem Drucke zuzunehmen, jedoch sind diese Aenderungen nur sehr klein, was also mit dem früher gefundenen Resultate nicht gut

1) E. Riecke und W. Voigt l. c. p. 549.

übereinstimmt. Jedoch kann man diesen letzten Beobachtungen vielleicht nicht denselben Werth geben, wie den vorigen, da der Turmalin B an einer Kante ein wenig ausgebrochen und außerdem etwas gesprungen ist, wodurch sein regelmäßiges Verhalten wahrscheinlich beeinträchtigt wird.

Die Resultate dieser Arbeit sind also: Die Abweichungen von der Proportionalität zwischen den piëzoelectrischen Momenten und den sie hervorrufenden Drucken sind für gewöhnlich benutzte Belastungen ganz klein. Bei dem Quarze ist die erregte Electricitätsmenge bei den größeren Drucken etwas kleiner, bei dem Turmaline etwas größer, als nach der Proportionalität zu erwarten ist.

Die vorstehenden Untersuchungen habe ich im physikalischen Institute der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen ausgeführt.

Göttingen, Anfang März 1899.

Ueber freie Elektricität an der Oberfläche Crookes'scher Röhren.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. März 1899.

Die Entladungserscheinungen der Elektricität in verdünnten Gasen bergen trotz der vielen auf ihre Untersuchung gerichteten Arbeit noch so viele Räthsel, daß man immer hoffen kann, durch die Anwendung eines neuen Untersuchungsmittels zu neuen Aufschlüssen zu gelangen. Dieser Gedanke veranlaßte mich bei einigen mit verdünnten Gasen gefüllten Röhren Bestäubungsversuche mit dem Lichtenberg'schen Gemisch von Mennige- und Schwefelpulver zu machen. Ueber die Ergebnisse der Versuche erlaube ich mir im Folgenden kurz zu berichten.

Ich hatte ursprünglich die Bestäubung auf eine größere Zahl von Röhren ausgedehnt, welche im Besitze des hiesigen physikalischen Institutes sind; zuletzt habe ich mich auf die etwas ausführlichere Untersuchung von 4 Röhren beschränkt, welche besonders charakteristische Resultate zu geben schienen. Die erste dieser Röhren war eine Kugelröhre zur Demonstration der durch die Kathodenstrahlen erzeugten Fluorescenz des Glases. Die Kathode war eine ebene Scheibe von 2,4 cm Durchmesser; der Zuleitungsdraht lag in der Aequatorialebene der Kugel, die Fläche der Kathode stand zu dieser Ebene senkrecht; die Anode war durch einen in der Kugelaxe verlaufenden Draht dargestellt, der in eine Ansatzröhre eingeschmolzen war. Der Durchmesser der Kugel betrug 10,5 cm. Die zweite Röhre war eine birnförmige Röntgenröhre, als solche übrigens nur wenig wirksam. Die Länge der Röhre betrug 24 cm, der Durchmesser der Kathode 2,4 cm. Die dritte Röhre war eine Schattenkreuz-Röhre von 22 cm Länge;

der Durchmesser der Kathode betrug 1 cm. Die vierte Röhre endlich war eine kugelförmige Röntgenröhre mit Platinspiegel. Der Durchmesser der Kugel betrug 9,5 cm; die Kathode war durch einen Hohlspiegel dargestellt, dessen Randkreis einen Durchmesser von 3,2 cm besaß. Der Kathode gegenüber lag der Platinspiegel; der ihn tragende Draht war in einen kleinen Ansatz der Kugel eingeschmolzen und fiel zusammen mit der Axe der Hohlspiegelkathode. Die Anode war durch eine ebene Aluminiumscheibe dargestellt und lag seitlich in der durch die Axe des Hohlspiegels und die Normale des Platinspiegels gehenden Ebene.

Die Resultate der mit diesen 4 Röhren erhaltenen Versuche lassen sich in folgender Weise zusammenfassen.

1. Der Kathode gegenüber bildet sich auf der Wand des Glases ein Ring, welcher den nach außenhin sich verbreitenden gelben Staub sehr scharf begrenzt. Der Ring fällt etwa an die Grenze des hell fluorescierenden Theiles der Glaswand.

2. Nur innerhalb dieses Ringes finden sich — von der Eintrittsstelle der Kathode abgesehen — rothe Stellen, d. h. solche, welche das positiv elektrische Mennigepulver anziehen.

3. Die Vertheilung des rothen Pulvers im Inneren des Ringes ist ungleichmäßig, was wahrscheinlich durch eine ungleichmäßige Oberflächenbeschaffenheit der Kathode bedingt ist. Gegen den gelben Ring hin ist der rothe Staub stets scharf begrenzt, die zwischen dem rothen Staub und dem Ring liegende Glasfläche ist von Staub ganz frei.

4. Zwischen die roth bestäubten Stellen im Inneren des Ringes schieben sich, und zwar nach außen hin, häufig gelb bestäubte Stellen ein. Diese Stellen können sich der durch den Ring begrenzten äußeren Bestäubung bis auf einen sehr kleinen Abstand nähern, in der Regel tritt aber in dem schmalen Bande, welches die äußere Bestäubung von inneren gelben Staubmassen trennt, ein scharfer Streifen rothen Staubes auf.

5. Im Inneren des gelben Ringes überwiegt der rothe Staub bei abgeleiteter Anode; aber auch bei abgeleiteter Kathode nimmt bei längerer Dauer des Stromes die Menge des rothen Staubes zu.

6. Verlängert man die Kathodenebene bis zum Schnitt mit der Glasoberfläche, so bildet die Schnittlinie die Axe eines etwa cm-breiten Ringes, der von Staub ganz frei ist. Von der Eintrittsstelle des die Kathode tragenden Drahtes bis zu diesem Ringe bedeckt sich das Glas mit rothem Staube.

7. Bei abgeleiteter Anode bildet der Schwefelstaub an der Oberfläche des Glases scharf begrenzte Bänder, welche von der

Anode einerseits nach der Kathode, andererseits nach dem ihr gegenüber auf der Glaswand entstehenden negativ elektrischen Flecken hingehen.* Es liegt nahe, diese Bänder mit Strömungen in Verbindung zu bringen, durch welche die Elektricität der Anode mit den entgegengesetzten Elektricitäten der Kathode und des Fluorescenzfleckes sich ausgleicht; der letztere würde dabei die Rolle einer zweiten Kathode spielen.

8. Metalldrähte und Bleche, welche in den Weg der Kathodenstrahlen gestellt werden, geben auf der von den Strahlen getroffenen Glaswand elektrische Schatten. So blieb bei den Versuchen mit der Schattenkreuzröhre der Schatten des Kreuzes und der Schatten des das Kreuz tragenden Drahtes von rothem Staube vollkommen frei, und der Schatten hob sich dadurch ganz scharf von seiner Umgebung ab. Der Schatten selbst blieb entweder ganz frei von Staub, oder er bedeckte sich in der Mitte mit Schwefelstaub. So zog sich bei einigen von den Versuchen, welche mit der Schattenkreuzröhre angestellt waren, durch die Mitte des von dem Drahte erzeugten Schattens eine feine gelbe Linie.

9. Wenn ein Blech von Kathodenstrahlen getroffen wird, so entsteht auf der Glaswand in der Ebene des Bleches und zwar auf der von der Kathode abgewandten Seite eine intensive rothe Linie von etwa Millimeter-Breite; ihre Länge entspricht dem Durchmesser des Bleches. Die Sache verhält sich so, wie wenn die Kathodenstrahlen von dem Bleche streifend reflectiert worden wären. Die Linie ist sehr schön zu sehen bei der Schattenkreuzröhre, wenn das Kreuz niedergelegt wird; sie tritt aber ebenso bei der Spiegelröhre auf in der Verlängerung der Spiegelebene.

10. Wenn bei der zuletzt genannten Röhre der Spiegel isoliert wird, so bildet sich ihm gegenüber auf der Glaswand ein Ring von derselben Art, wie er bei einer gewöhnlichen Röhre der Kathode gegenüber auftritt. Es kann dieß entweder durch eine regelmäßige Reflexion der Kathodenstrahlen an der Spiegeloberfläche bedingt sein, oder dadurch, daß der von den Kathodenstrahlen getroffene Spiegel selber als Kathode wirkt; die Lage des Ringes macht es wahrscheinlich, dass die erste Annahme die richtige ist.

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VII).

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Mai 1899.

1. Ueber substituirte Cyanamide und Thiocarbamide.

Das Cyanamid vermag in den beiden Formen

$$\begin{matrix} C{:}N \\ | \\ NH_2 \end{matrix} \quad \text{und} \quad C\begin{matrix} :NH \\ :NH \end{matrix}$$

zu reagieren, die man als wahres Cyanamid und als Carbodiimid unterscheiden kann. Einige Reactionen des Cyanamids, wie z. B. die Polymerisationsfähigkeit, haben augenscheinlich den Uebergang in die Imid-Form zur Voraussetzung. Die Monosubstituirten Cyanamide unterscheiden sich im allgemeinen Verhalten von der Muttersubstanz wenig. Es ist das vorauszusehen, denn sie können auch in den beiden Formen

$$\begin{matrix} C{:}N \\ | \\ NHR \end{matrix} \quad \text{und} \quad C\begin{matrix} :NH \\ :NR \end{matrix}$$

reagieren.

Ein abweichendes Verhalten nach mancher Richtung darf man von den vollkommen substituirten Cyanamiden erwarten, namentlich von denen, in welchen die beiden Wasserstoffatome der Amidgruppe durch ein zweiwerthiges Radical vertreten sind. Diejenigen Reactionen des Cyanamids, welche auf einem Uebergang in die Imidform beruhen, sollten bei den Repräsentanten vom Typus

$$\begin{array}{l} C{:}N \\ | \quad I \\ N{:}R_2 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} C{:}N \\ | \quad II \\ N{:}R \end{array}$$

ausbleiben. Auch die Neigung zur Polymerisation, der freiwillige Uebergang der Cyanamid- in die Melamin-Form ist bei den ganz substituirten Cyanamiden schwerer zu erwarten.

Merkwürdiger Weise sind die ganz substituirten Cyanamide nun noch wenig bekannt und die bekannten sind, wie es scheint, nicht durch directe Wechselwirkung von Cyanhalogen mit secundären Basen gewonnen, sondern durch Umsetzung von Cyanamidsilber mit Alkyljodid

$$(\text{z. B. } CN.NAg_2 + 2JC_2H_5 = 2AgJ + CN.N(C_2H_5)_2)$$

oder als Nebenproduct bei der Zersetzung von Monoalkylcyanamiden.

Es war mir nun von verschiedenen Gesichtspunkten aus von Interesse, einige der vollkommen substituirten Cyanamide kennen zu lernen. Man kann die Verbindungen, wie sich herausgestellt hat, mit größter Leichtigkeit durch Einwirkung von Bromcyan (1 Mol.) auf eine ätherische Lösung von secundären Basen (2 Mol.) erhalten. Es scheidet sich alsbald 1 Mol. der angewandten Base in Form des Bromhydrats aus und in der ätherischen Lösung bleibt das neue Cyanamid. Man destillirt nun den Aether bei gewöhnlichem Druck ab und rectificirt den Rückstand im Vacuum, da die neuen Verbindungen beim Erhitzen bei gewöhnlichem Druck Zersetzung erleiden.

Auf dem angegebenen Wege sind, unter Mitwirkung des Herrn Dr. Sämann, folgende Verbindungen vorläufig dargestellt und analysirt worden.

Cyandimethylamin, $CN.N(CH_3)_2$, Oel, Siedp. 52° bei 14mm.
Cyandiaethylamin, $CN.N(C_2H_5)_2$, Oel, Siedp. 68° bei 10mm.
Cyandipropylamin, $CN.N(C_3H_7)_2$, Oel, Siedp. 88—90° bei 10mm.
Cyandiamylamin, $CN.N(C_5H_{11})_2$, Oel, Siedp. 130—132° bei 10mm.
Cyanpiperidin, $CN.NC_5H_{10}$, Oel, Siedp. 102° bei 10mm.
Cyandibenzylamin, $CN.N(CH_2C_6H_5)_2$, bei 54° schmelzende Krystalle, Siedep. 145—148° bei 10mm.
Cyanmethylanilin, $CN.N(CH_3.C_6H_5)$ bei 28° schmelzende Krystalle, Siedep. 136° bei 10mm.

Sämmtlichen der oben beschriebenen Cyanamide ist gemeinsam, daß sie keine Neigung zur freiwilligen Polymerisation zeigen und daß sie beim Sättigen ihrer alkoholischen Lösung mit Ammoniak

und Schwefelwasserstoff letzteren meist leicht und schnell unter Bildung von schön krystallisierten Thioharnstoffen addiren.

Einige der auf diese Weise bequem zu erhaltenden unsymmetrischen Thioharnstoffe sind bereits auf anderem Wege und zwar durch Umlagerung von rhodanwasserstoffsauren Diaminen dargestellt worden. So erhielt Gebhardt (Ber. chem. Ges. **17**. 2094) solche Thiocarbamide aus Monomethyl- und Monoaethyl-Anilin, H. Salkowsky aus Dibenzylamin (ebend. **24**. 2727 und **26**. 2501). Letzterer stellte gleichzeitig fest, daß die Umlagerung rhodanwasserstoffsaurer Diamine der Fettreihe sich außerordentlich schwer vollzieht und daß die gebildeten Thioharnstoffe sich schlecht isoliren lassen und er sprach die Vermuthung aus, daß Spica und Carrara, welche auf analogem Wege unsymmetrische Thioharnstoffe der Fettreihe gewonnen zu haben meinten (Gazz. chim. ital. **21**. 421, Ber. chem. Ges. **24**. R. 625), in Irrthümer verfallen seien. Für das Dimethylthiocarbamid hat H. Salkowsky das bereits bestimmt nachweisen können. Daß es auch für die entsprechenden Verbindungen zutrifft geht aus der folgenden Tabelle hervor, in der ich die Schmelzpunkte der aus den Cyanamiden gewonnenen Thioharnstoffe, deren Reinheit durch die Art der Gewinnung und die Analyse verbürgt ist, zusammenstelle und daneben die Angaben der Autoren setze, welche bereits vorliegen.

	Schmelzpunkte	
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(CH_3)_2\end{matrix}$	158—159° (Wallach)	159° (H. Salkowsky) 81—82°(!) (Spica u. Carrara)
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(C_2H_5)_2\end{matrix}$	101—102° „	169—170°(!) (Spica u. Carrara)
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(C_3H_7)_2\end{matrix}$	67° „	—
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(C_5H_{11})_2\end{matrix}$	63—64° „	208—209°(!) (Spica u. Carrara)
$CS\begin{matrix}NH_2\\N\,C_5\,H_{10}\end{matrix}$	128° „	—
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(CH_2C_6H_5)_2\end{matrix}$	139—140° „	139—140° (H. Salkowsky)
$CS\begin{matrix}NH_2\\N(CH_3.C_6H_5)\end{matrix}$	106—107° „	107° (Gebhard)

Wie man bemerkt sinken die Schmelzpunkte der unsymmetrischen Thioharnstoffe der Fettreihe mit steigendem Moleculargewicht, während Spica und Carrara grade das Umgekehrte behauptet haben. Die Verbindungen krystallisiren meist sehr gut, namentlich zeichnet sich das Diaethylthiocarbamid durch Krystallisationsfähigkeit aus. Sie sind sehr löslich in Alkohol, wenig löslich in Aether und können vortheilhaft durch Zusatz von Aether zu ihrer methylalkoholischen Lösung umkrystallisirt werden.

Die oben beschriebenen Cyanamide lassen sich natürlich auch zur Darstellung anderer Verbindungen nutzbar machen. So kann man z. B. auch die unsymmetrischen Harnstoffe aus ihnen gewinnen, worüber bei anderer Gelegenheit berichtet werden soll.

Schwierigkeiten bin ich bisher bei dem Versuch begegnet, die CN-Gruppe zu CH_2NH_2 zu reduciren und auf diese Weise zu substituirten Diaminen zu gelangen, doch sollen diese Versuche noch fortgesetzt werden.

Durch den Eintritt der CN-Gruppe ist der basische Character der Amine stark abgeschwächt. Am lehrreichsten tritt das bei einem Vergleich des Cyanmethylanilins mit dem Dimethylanilin hervor.

Bei rein typischer Betrachtungsweise

$C_6H_5N\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}$	$C_6H_5N\begin{matrix}CH_3\\C:N\end{matrix}$
Dimethylanilin	Cyanmethylanilin

sollte man ein ähnliches Verhalten beider Verbindungen voraussetzen, denn in der zweiten Verbindung sind nur die drei Wasserstoffatome eines CH_3 durch N ersetzt, sonst ist der Bau der Substanzen ganz analog. Nichtsdestoweniger fehlen dem Cyanmethylanilin die characteristischen Merkmale des Dimethylanilins (Bildung von Malachitgrün und von Nitrosoverbindung) vollkommen.

2. Ueber Phenyl- und Tolyl-isobuttersäure.

Die Friedel-Krafft'sche Reaction ist zur Synthese aromatischer Säuren, welche das Carboxyl in einer kohlenstoffreicheren Seitenkette enthalten, noch wenig practisch verwerthet worden. Aus den vorliegenden Litteraturangaben ist man nun berechtigt zu schließen, daß nach dieser Richtung wohl Versuche angestellt sind, daß dieselben aber zu keinem günstigen Resultat führten. Einige orientirende Versuche, welche ich unternahm, bestätigten zunächst die Voraussetzung, daß die Synthese von Säuren durch Einwirkung

halogenisirter Säuren auf Benzolkohlenwasserstoffe bei Gegenwart von Aluminiumchlorid auf Schwierigkeiten stößt. Monochloressigsäure oder Monochloressigester mit Benzol und Aluminiumchlorid in Reaction gebracht, führen keineswegs in nennenswerther Ausbeute zur Phenylessigsäure. Das stimmt mit Beobachtungen von Elbs und Tölle[1]), welche aus Trichloressigsäure und Benzol bei Gegenwart von Aluminiumchlorid nur in ganz unbefriedigender Ausbeute (5 %) Triphenylessigsäure erhielten. Eine weitere Verfolgung des Gegenstandes belehrte nun darüber, daß es durchaus nicht gleichgültig ist, ob man bei der betreffenden Reaction von gechlorten oder gebromten Verbindungen ausgeht und ob man bei Gegenwart von Chlor- oder von Brom-Aluminium arbeitet. Während z. B. bei der Reaction zwischen α-Chlorisobuttersäureester, Benzol und Aluminiumchlorid sich auch nur sehr wenig einer aromatischen Säure bildet, bekommt man eine recht ansehnliche Ausbeute an Phenylisobuttersäure, wenn man Aluminiumbromid mit α-Bromisobuttersäureester und Benzol in Reaction bringt. Dabei ist bemerkenswerth, daß unter den gewählten Bedingungen nicht der Ester der aromatischen Verbindung, sondern die freie Säure entstand, entsprechend der Gleichung:

$$(CH_3)_2 . C . Br . CO_2 C_2 H_5 + C_6 H_6 = (CH_3)_2 C (C_6 H_5) CO_2 H + C_2 H_5 Br.$$

Nachdem die Möglichkeit der Synthese auf diese Weise klar gelegt war, habe ich einige der noch nicht bekannten Säuren der Reihe darstellen und auf ihr Verhalten untersuchen lassen.

Herr N. Kestner hat bezüglich der Phenylisobuttersäure Folgendes festgestellt.

Die freie Säure $C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO_2 H$ schmilzt bei 77—78° und siedet bei 10^{mm} zwischen 150—155° [Phenylessigsäure, $C_6H_5CH_2CO_2H$ schmilzt bei 76°,5 und siedet bei 12^{mm} zwischen 144—145°. Der Schmelzpunkt ist also durch Einführung des Methyls in die Seitenkette wenig verändert.] Das Silbersalz der Säure ist in Wasser unlöslich, das Calciumsalz krystallisirt mit 2 Mol. Wasser.

Die Eigenschaften einiger Derivate der Säure ergeben sich aus folgender Zusammenstellung:

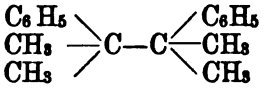
Methylester	$C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO_2 CH_3$	Siedepunkt:	225°.
Aethylester	$C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO_2 C_2 H_5$	„	235—236°.
Propylester	$C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO_2 C_3 H_7$	„	250°.
Isobutylester	$C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO_2 C_4 H_9$	„	260—261°.
Chlorid	$C_6 H_5 C (CH_3)_2 CO Cl$	„	109° bei 13^{mm}.

1) Journ. f. pr. Ch. 32, 624.

Das Amid $C_6H_5C(CH_3)_2CONH_2$ schmilzt bei 160—161° und siedet bei 80^{mm} bei 200—205°. Es kann aus heißem Alkohol umkrystallisirt werden und ist in Aether sehr wenig, in kaltem Wasser fast gar nicht löslich. Das daraus dargestellte Nitril $C_6H_5C(CH_3)_2CN$ siedet bei 232°, $d = 0.966$, $n_D = 1.50665$ bei 21°.

	Berechnet	Gefunden
M	44.75	44.64

Man entzieht dem Amid, um es in Nitril zu verwandeln, besser mit Hülfe von Phosphorpentachlorid als mit Phosphorsäureanhydrid Wasser. In letzterem Fall findet nämlich, wohl in Folge der höheren bei der Destillation zur Anwendung kommenden Temperatur eine Nebenreaction statt, welche zur Bildung eines Kohlenwasserstoffs führt, der bei 55—56° schmilzt und bei 15^{mm} bei 138—140° siedet. Der noch nicht eingehender studirte Kohlenwasserstoff ist wahrscheinlich Tetramethyldiphenylaethan,



dessen Bildung aus dem Nitril durch CN-Abspaltung leicht verständlich wäre.

Die Isolierung des dem Nitril beigemengten Kohlenwasserstoffs, der durch bloße Destillation davon nicht zu trennen ist, gelingt am besten, wenn man das Nitril in alkoholischer Lösung mit Natrium reducirt, die entstandene Base an Säure bindet und dann den Kohlenwasserstoff mit Wasserdampf abtreibt und aus dem Destillat extrahirt.

Das bei der Reduction des Nitrils entstehende Phenyldimethylaethylamin, $C_6H_5C(CH_3)_2CH_2NH_2$ ist ein farbloses Oel. Das in Wasser sehr lösliche Chlorhydrat der Base kann aus der gut getrockneten aetherischen Lösung durch Salzsäuregas gefällt werden. Beim Erwärmen einer wässrigen Lösung des Chlorhydrats mit Kaliumcyanat erhält man das Carbamid

$$C_6H_5C(CH_3)_2CH_2NHCONH_2,$$

welches aus siedendem Alkohol in durchsichtigen, bei 140—141° schmelzenden Tafeln krystallisirt erhalten werden kann.

Herr stud. Quantz hat auf ganz analogem Wege die Tolylisobuttersäure $C_6H_4(CH_3).C(CH_3)_2CO_2H$ gewonnen. Diese Säure krystallisirt wegen ihrer großen Löslichkeit in den üblichen organischen Solventien schwieriger als die niedere Homologe. Sie schmilzt bei 72° und siedet bei 12^{mm} zwischen 172—180°.

Das Amid $C_6H_4(CH_3).C(CH_3)_2CONH_2$ schmilzt bei 123—124° und siedet bei 84^{mm} zwischen 240—247°.

Das daraus gewonnene Nitril, $C_6H_4(CH_3).C(CH_3)_2CN$ siedet bei 247—248°; $d = 0.955$, $n_D = 1.5057$ bei 20° [$M = 49.44$ berechnet 49.37]. Unter dem Einfluß von Phosphorsäureanhydrid wird das Amid auch zum Theil unter Bildung eines Kohlenwasserstoffs zersetzt. Derselbe siedet bei 169—173° und ist seinen Eigenschaften und der Analyse gemäß nichts anderes als p. Isobutyltoluol $C_6H_4\begin{matrix}CH_3\\C(CH_3)_3\end{matrix}$.

3. Umwandlung Pentacyclischer in Stickstoffhaltige Hexacyclische Verbindungen.

Die folgenden Versuche sind gemeinsam mit Stud. W. Rath ausgeführt worden.

Wenn man Methyladipinsäure in β-Methylpentanon überführt und dieses mit Hydroxylamin behandelt, so erhält man ein Oxim, das in zwei Modificationen auftritt, die aber sehr schwer zu trennen sind. Die eine Modification geht bei 12^{mm} bei 102° über und schmilzt nach dem Umkrystallisiren aus Ligroin bei 87°, die andere geht unter demselben Druck schon etwas niedriger über (bei 99°) und schmilzt auch etwas niedriger (bei 84°).

Destillirt man das Oxim über Phosphorpentoxyd, so wird unter Wasserabspaltung ein Nitril C_5H_9CN gebildet. Diese Nitrilbildung erfolgt unzweifelhaft unter Ringsprengung und dem Nitril wird etwa eine der Formeln

$$CH_2:C(CH_3).CH_2CH_2CN \text{ oder } CH_3CH:C(CH_3)CH_2CN$$

zukommen. Versuche für die Constitutionsbestimmung stehen noch aus.

Wenn man den Rückstand des Gefäßes aus dem man das bei der Reaction zwischen Oxim und Phosphorpentoxyd entstandene Nitril abdestillirt hat, mit Wasser aufnimmt und die sauere Flüssigkeit alkalisch macht, so bemerkt man das Auftreten einer stark nach Pyridin riechenden Base.

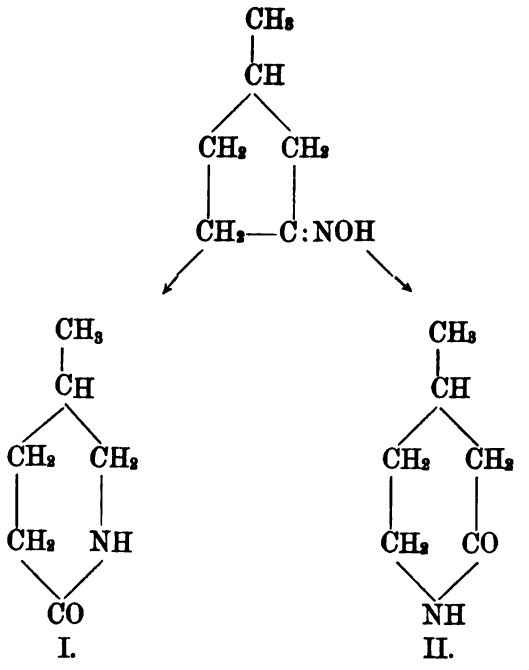
Diese Base wurde in geeigneter Weise isolirt, getrocknet und dann der Destillation unterworfen. Der Siedepunkt lag anfangs zwischen 135—151°. Als Hauptproduct wurde bei weiterer Reinigung eine bei 144—147° siedende Flüssigkeit erhalten, deren Analyse Zahlen gab, welche gut auf die für Picolin $C_5H_4(CH_3)N$ berechneten stimmten. Auch die eingehendere Untersuchung der

Base ließ gar keinen Zweifel darüber, daß bei der Reaction ein Methylpyridin und zwar β-Picolin entstanden war. Eine Gegenüberstellung der beobachteten und in der Litteratur verzeichneten Angaben der Eigenschaften der Base und einiger ihrer Derivate macht das deutlich.

	Beobachtet Siedepunkt 144—147°		Angegeben für β-Picolin schwankend zwischen 140—149°
Platinsalz	Schmelzp.	193°	191° und 195°
Goldsalz	„	181—183°	182—184°
Picrat, Prismen	„	149—150°,5	149—150°.

Wenn danach die Identität des isolirten Products mit β-Picolin ganz zweifellos erscheint, so ließ sich doch ebenso sicher feststellen, daß neben β-Picolin noch eine andere Base entstanden war. Durch fractionirte Krystallisation des Picrats waren nämlich zwei verschiedene Salze nachweisbar. 1) Ein schwerer lösliches, in reinem Zustande in durchsichtigen Prismen krystallisirendes: eben das bei 149—150° schmelzende β-Picolin-Picrat und 2) ein leichter lösliches, in büschelförmig angeordneten feinen Nädelchen krystallisirendes Salz, das bei 165—166° schmolz.

Es ist wahrscheinlich, daß diese Verbindung ein Salz des γ-Picolins ist, für dessen Picrat sich der Schmelzpunkt 167° und 156—157° angegeben findet. Doch ist das vorläufig nur mit Vorsicht anzunehmen, da es bis jetzt nicht gelungen ist das höher schmelzende Salz von völlig einheitlichem Aussehen zu erhalten und es aus theoretischen Gründen sehr nahe liegt auch ein Hydropicolin in dem Reactionsgemisch zu vermuthen. Denn durch Wasserentziehung aus dem Methylpentanonoxim $C_5H_7(CH_3)NOH$ = $C_6H_{11}NO$ sollte zunächst ein Bihydropicolin C_6H_9N sich bilden, welches dann durch Wasserstoffabspaltung in Picolin C_6H_7N übergehen kann. Daß andererseits die Möglichkeit vorliegt, daß sich aus β-Methylpentanonoxim gleichzeitig β- und γ-Picolin bildet, sieht man sofort ein, wenn man die gewiß zulässige Annahme macht, daß der Wasserabspaltung aus dem Oxim in allen Fällen eine Beckmann'sche Umlagerung vorausgeht, die nach zwei Richtungen verlaufen kann, nämlich



Aus I würde man dann die Bildung von β-Picolin, aus II die Bildung von γ-Picolin zu erwarten haben.

Der ganze Vorgang besitzt um so mehr Interesse, als bereits nachgewiesen werden konnte, daß auch aus anderen cyclischen Oximen sich in ganz entsprechender Weise cyclische Basen mit Stickstoff-Stellung im Ringe herstellen lassen. Es gilt das z. B. von Methylhexanonoxim, dessen Umwandlungsproducte augenblicklich noch untersucht werden.

Daß man vom Pentanon ausgehend auf diesem Wege zum Pyridin synthetisch gelangen kann, ist selbstverständlich. Da man das Cyclopentanon aus der Adipinsäure und diese (durch die β-Jodpropinsäure hindurch) aus dem Methan aufbauen kann, so liegt gleichzeitig eine neue Synthese der Pyridinbasen aus den Elementen vor.

4. Ueber gemischte Diazoamidoverbindungen.

Herr A. Tewes hat einige Verbindungen dieses Typus auf meine Veranlassung neu dargestellt und auf ihr Verhalten untersucht.

Die Paarungsproducte der diazotirten Amidobenzoesäuren mit Piperidin haben folgende Eigenschaften:

$C_6H_4\overset{COOH}{\underset{N:N.NC_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(2)}$ weiße Blättchen, Schmelzp. 84°.

Das Ammoniaksalz dieser Säure ist in Aether unlöslich, das Silbersalz krystallisirt aus Alkohol in farblosen Nadeln.

$C_6H_4\overset{COOH}{\underset{N:N.NC_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(3)}$ bei 123° schmelzende Krystalle.

$C_6H_4\overset{COOH}{\underset{N:N.NC_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(4)}$ bei 158° unter Zersetzung schmelzende Prismen.

Aus diazotirtem p. Amidophenol und aus p. Anisidin wurden durch Umsetzung mit Piperidin folgende Verbindungen gewonnen:

$C_6H_4\overset{OH}{\underset{N:N.NC_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(4)}$ Schmelzp. 87—88°.

$C_6H_4\overset{OCH_3}{\underset{N:N.NC_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(4)}$ große, gelbe bei 33—34° schmelzende Krystalle von Benzaldehydartigem Geruch.

Die Umsetzungsfähigkeit dieser Verbindungen ist ganz analog der des von mir früher untersuchten Benzoldiazopiperidids. Das Verhalten des letzteren gegen freies Brom war noch nicht geprüft worden.

Läßt man 1 Mol. Brom auf eine Lösung von Benzoldiazopiperidid in Schwefelkohlenstoff einwirken, so fällt das Bromwasserstoffsaure Salz des Piperidids

$$C_6H_5N:N.NC_5H_{10}.HBr$$

aus. Diese Verbindung zeigt beiläufig beim Erwärmen mit verdünnter Schwefelsäure ein eigenthümliches Verhalten. Es entsteht dabei nämlich als Zersetzungsproduct (neben Phenol) in reichlicher Menge Tribromphenol (Schmelzp. 92°).

Beim Bromiren des Ausgangsmaterials bleibt im Schwefelkohlenstoff gelöst das Bromid

$$C_6H_4\overset{Br}{\underset{N:N.N.C_5H_{10}}{}}\ {}^{(1)}_{(4)}$$

welches aus Aether oder Alkohol umkrystallisirt in Form gelber, bei 55° schmelzender Blättchen erhalten wird. Beim Erwärmen mit concentrirter Bromwasserstoffsäure zerfällt das Bromid unter Bildung von p. Bibrombenzol (Schmelzp. 89°). Damit war der Beweis geliefert, daß beim Bromiren des Ausgangskörpers das Brom in Parastellung zum Stickstoffhaltigen Radical getreten war.

Es war von gewissem Interesse zu verfolgen, wie die Reaction verläuft, wenn die Parastellung durch andere Gruppen besetzt ist. Es wurde daher p. Toluoldiazopiperidid bromirt. Es entstand dabei das Product

$$\begin{array}{ll} & CH_3 \quad (1) \\ C_6H_3 & Br \quad (3) \\ & N:N.NC_5H_{10} \quad (4) \end{array}$$

welches aus Alkohol in gelben, würfelförmigen Krystallen vom Schmelzp. 52—53° herauskommt. Die Anordnung der Substituenden wurde dadurch ermittelt, daß das Bromid durch Kochen mit conc. Bromwasserstoffsäure zerlegt und das dabei entstehende flüssige Bibromtoluol oxydirt wurde. Es entstand die Bibrombenzoesäure $C_6H_3COOH_{(1)}Br_{(3)}Br_{(4)}$ vom Schmelzpunkt 230°. Beim Bromiren von Ortho-Toluoldiazopiperidid entstand eine Oelförmige Verbindung:

$$\begin{array}{ll} & CH_3 \quad (1) \\ C_6H_3 & N:N.NC_5H_{10} \quad (2) \\ & Br \quad (3) \end{array}$$

Größeres Interesse beanspruchte das Verhalten der früher von mir schon dargestellten Sulfosäure des Diazobenzolpiperidids gegen Brom.

Wenn man das Natriumsalz dieser Verbindung, (1 Th.)

$$C_6H_4 \begin{array}{ll} N_3C_5H_{10} & (1) \\ SO_3Na & (4) \end{array},$$

in wässriger Lösung und unter guter Kühlung langsam mit Brom versetzt (6 Theile), so entsteht nach kurzer Zeit ein schwefelgelber Niederschlag. Dieser muß sehr schnell abfiltrirt und im Exsiccator auf Thon getrocknet werden, da es sich feucht sehr schnell zersetzt. Zur Reinigung kann man die Verbindung in Aceton lösen und mit wasserfreiem Aether ausfällen. Man erhält sie dann in hellgelben, beim Erhitzen verpuffenden Kryställchen. Diese Substanz hat sich als das schon von Griess erhaltene Perbromid

$$\begin{array}{ll} & N.Br.NBr_2 \quad (1) \\ C_6H_3 & Br \quad (2) \\ & Br \quad (4) \end{array}$$

herausgestellt. Entsprechend dem Befunde von Griess wurde aus der Verbindung beim Kochen mit Alkohol das bei 43—44° schmelzende Tribrombenzol (1:2:4) erhalten, durch Behandeln mit Am-

moniak aber das mit Wasserdämpfen flüchtige bei 62° schmelzende, beim Erhitzen explodirende Dibromdiazobenzolimid

$$C_6H_3\begin{matrix}N_3\,(1)\\Br\,(2)\\Br\,(4).\end{matrix}$$

Aus diesem Dibromdiazobenzolimid konnte durch Kochen mit conc. Bromwasserstoffsäure das bei 119° schmelzende Tribromanilin $C_6H_2NH_2(1)Br(2)Br(4)Br(6)$ leicht gewonnen werden.

Für den geschilderten eigenthümlichen Reactionsverlauf, welcher von der Sulfosäure des Diazobenzolpiperidids zum Dibromdiazobenzolperbromid führt, kann man folgende Phasen annehmen:

1) $C_6H_4\begin{matrix}N_3C_5H_{10}(1)\\SO_3Na\ (4)\end{matrix} + Br_2 = C_6H_3\begin{matrix}N_3C_5H_{10}\,(1)\\Br\ (2)\\SO_3H\ (4)\end{matrix} + NaBr.$

2) $C_6H_3\begin{matrix}N_3C_5H_{10}\\Br\\SO_3H\end{matrix} + H_2O = C_6H_4\begin{matrix}N_3C_5H_{10}\,(1)\\Br\ (2)\end{matrix} + SO_4H_2$

3) $C_6H_4\begin{matrix}N_3C_5H_{10}\,(1)\\Br\ (2)\end{matrix} + Br_2 = C_6H_3\begin{matrix}N_3C_5H_{10}\,(1)\\Br\ (2)\\Br\ (4)\end{matrix} + BrH$

4) $C_6H_3\begin{matrix}N:N.NC_5H_{10}\\Br\\Br\end{matrix} + BrH + SO_4H_2 = C_6H_3\begin{matrix}N:N.Br\\Br\\Br\end{matrix} + SO_4H_2.NHC_5H_{10}.$

5) $C_6H_3\begin{matrix}N:N.Br\\Br\\Br\end{matrix} + Br_2 = C_6H_3\begin{matrix}NBrNBr_2\,(1)\\Br\ (2)\\Br\ (4).\end{matrix}$

Bemerkenswerth ist, daß die Sulfogruppe schon in eiskalter wäßriger Lösung hier so leicht durch Brom verdrängt wird.

Der bis dahin auch noch nicht durchgeführte Uebergang vom Dibromdiazobenzolimid in Tribromanilin findet sein vollkommenes Analogon in der Ueberführbarkeit von Benzolazimid $C_6H_5N_3$ in Monochloranilin durch concentrirte Salzsäure.

Beweis zweier Sätze über die Bestimmung von Ovaloïden durch das Krümmungsmaß oder die mittlere Krümmung für jede Normalrichtung.

Von

H. Liebmann.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung am 13. Mai 1899.

§ 1. Definitionen.

1. Unter einem Ovaloïd verstehen wir eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche positiver Krümmung, und wir setzen überdies analytische Entwickelbarkeit voraus.

In jedem Punkt soll sich nämlich, wenn man ein geeignetes Coordinatensystem wählt (das wir am passendsten als das natürliche Coordinatensystem der Fläche in dem betreffenden Punkt bezeichnen), die Fläche durch eine analytische Gleichung der Form

$$z = \frac{ax^2 + by^2}{2} + \cdots$$

darstellen lassen, wo a und b beide positiv sind.

2. Wir wollen im folgenden, wenn wir beweisen, daß zwei nicht congruente Ovaloïde nicht dieselbe Eigenschaft haben können, von der zu widerlegenden Annahme ausgehen, daß es unendlich viele Ovaloïde giebt, welche die betreffende Eigenschaft haben und durch eine continuirliche Folge von Deformationen in einander übergeführt werden können.

Es sei $z = z(x, y)$ das ursprünglich gegebene Ovaloïd; dann sollen sich andere Ovaloïde mit derselben (später zu definierenden Eigenschaft) daraus ableiten lassen und zwar möge dem Punkt

xyz des ursprünglichen Ovaloïdes der Punkt

$$x_1 = x + t\xi(x,y) + t^2\xi_1(x,y) + \cdots$$
$$y_1 = y + t\eta(x,y) + t^2\eta_1(x,y) + \cdots$$
$$z_1 = z + t\zeta(x,y) + t^2\zeta_1(x,y) + \cdots$$

des neuen Ovaloïdes entsprechen.

Wir nehmen also an, daß die verschiedenen Ovaloïde, welche dieselbe Eigenschaft haben, sich in der Form

$$x_1 = f_1(xyt)$$
$$y_2 = f_2(xyt)$$
$$z_3 = f_3(xyt)$$

darstellen lassen, wo dem Fall, daß $t = 0$ ist, das ursprünglich gegebene Ovaloïd entspricht.

Wenn nun dies der Fall ist, wenn es also eine Schaar von ∞^1 Ovaloïden giebt, die alle dieselbe Eigenschaft haben, so muß $\frac{\partial f_1}{\partial t}$, $\frac{\partial f_2}{\partial t}$, $\frac{\partial f_3}{\partial t}$ im allgemeinen von Null verschieden sein.

Ist aber $\frac{\partial f_1}{\partial t}$ u. s. w. Null für jeden Wert von t, so können wir das immer darauf reducieren, dass $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0$ ist für $t = 0$, indem wir statt x, y, z nehmen $x_1(xyt_0)$, $y_1(xyt_0)$, $z_1(xyt_0)$, wo unter t_0 der betreffende Wert von t verstanden ist, und statt t jetzt $t - t_0$.

Umgekehrt, wenn wir zeigen, daß, wenn ein Ovaloïd die Eigenschaft hat, für dieses Ovaloïd $\frac{\partial f_1}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial f_2}{\partial t} = 0$ $\frac{\partial f_3}{\partial t} = 0$ ist unter der Annahme $t = 0$, so folgt daraus: **Es kann nicht eine continuierliche Reihe von Ovaloïden geben, die die betreffende Eigenschaft haben.**

Hieraus kann man dann folgern, daß es nur eine einzelne solche Ovaloïde giebt.

Völlige Eindeutigkeit der Bestimmung ist zwar damit noch nicht bewiesen, ebensowenig wie aus dem Jacobi'schen Satz, daß auf den Flächen negativer Krümmung eine geodätische Linie ihrem ganzen Verlauf nach kürzeste Linie ist, etwa folgt, daß es auf einer Fläche negativer Krümmung nun zwischen zwei Punkten auch nur eine geodätische Linie giebt, immerhin ist eine große Allgemeinheit erreicht.

Wir setzen also

$$x_1 = x + \varepsilon\xi(x,y), \quad y_1 = y + \varepsilon\eta(x,y), \quad z_1 = z + \varepsilon\zeta(x,y)$$

und vernachlässigen höhere Potenzen; wir stellen dann an das transformierte Ovaloïd die Anforderung, daß es dieselbe (analytisch zu definierende) Eigenschaft wie das gegebene hat. Führt dann die Annahme, daß $\xi\eta\zeta$ alle drei von Null verschieden und keine Constanten sind, auf einen Widerspruch, so ist in dem eben entwickelten (beschränkten) Sinn die Einzigkeit der Lösung der betreffenden Aufgabe erwiesen.

3. In diesem Sinne nun stellen wir folgende Sätze auf:

a) Ein Ovaloïd ist vollkommen bestimmt, wenn das Krümmungsmaß als Function der Normalrichtung gegeben ist, wenn also $\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ eine gegebene (analytische) Function von p und q ist.

Unter p und q sind hier natürlich die Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ verstanden, ebenso unter r, s und t die zweiten Differentialquotienten

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ebenso gilt der Satz:

b) Ein Ovaloïd ist vollkommen bestimmt, wenn die mittlere Krümmung $\frac{r(1+q^2)-2pqs+t(1+p^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$ eine gegebene Function von p und q ist.

Den Beweis werden wir führen, indem wir zeigen, daß die Annahme zweier verschiedener Ovaloïde

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon\xi(x, y), \\ y_1 &= y + \varepsilon\eta(x, y), \\ z_1 &= z + \varepsilon\zeta(x, y) \end{aligned}$$

auf einen Widerspruch führt.

Es müßte nämlich, wie wir sehen werden, die Fläche, die man erhält, wenn man $\xi\eta\zeta$ als Coordinaten eines Punktes deutet, in beiden Fällen negative Krümmung haben, und sie wird, wie wir sehen werden, auch in den singulären Punkten den Character der negativen Krümmung nicht verlieren, d. h. auch die singulären Punkte werden die Eigenschaft haben, daß jede durch sie hindurchgehende Ebene die Fläche in zwei Teile schneidet. Diese „Unbegrenztheit" der Fläche $\xi\eta\zeta$ steht aber mit der Endlichkeit

derselben im Widerspruch[1]), woraus folgt, daß $\xi\eta\zeta$ alle drei Null sein müssen, oder das Ovaloïd xyz die einzige Lösung ist.

§ 2. Umrechnung der Differentialquotienten nach x_1 und y_1 in solche nach x und y.

1. Da wir im folgenden die Differentialquotienten nach x_1 und y_1 von z_1 brauchen, diese drei Größen aber als analytische Functionen von x und y gegeben sind, so müssen wir eine Umrechnung der Differentialquotienten vornehmen.

Zunächst ist, wie aus den Formeln

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial y}$$

leicht zu berechnen.

$$\frac{\partial x}{\partial x_1} = 1 - \varepsilon\xi_{x_1}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y_1} = -\varepsilon\xi_{y_1}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\varepsilon\eta_{x_1}, \qquad \frac{\partial y}{\partial y_1} = 1 - \varepsilon\eta_{y_1}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1} = \frac{\partial (z + \varepsilon\zeta)}{\partial x_1} = \frac{\partial z}{\partial x}(1 - \varepsilon\xi_{x_1}) + \frac{\partial z}{\partial y}(-\varepsilon\eta_{x_1}) + \varepsilon\zeta_{x_1}$$

und

$$\frac{\partial z_1}{\partial y_1} = \frac{\partial z}{\partial x}(-\varepsilon\xi_{y_1}) + \frac{\partial z}{\partial y}(1 - \varepsilon\eta_{y_1}) + \varepsilon\zeta_{y_1}.$$

Nun sollen in den sich entsprechenden Punkten der beiden Ovaloïde die Normalrichtungen gleich sein, d. h. es soll

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \text{ sein, oder:}$$

$$\xi_{x_1}\frac{\partial z}{\partial x} + \eta_{x_1}\frac{\partial z}{\partial y} - \zeta_{x_1} = 0 \text{ und}$$

$$\xi_{y_1}\frac{\partial z}{\partial x} + \eta_{y_1}\frac{\partial z}{\partial y} - \zeta_{y_1} = 0.$$

---

1 Vergl. § 3 und § 4 meiner Arbeit: „Eine neue Eigenschaft der Kugel" (p. 44 ff. dieses Bandes).

2. Unter dieser Annahme ist dann weiter

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1-\varepsilon\xi_x) - \varepsilon\frac{\partial z^2}{\partial x\partial y}\eta_x,$$
$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial y_1} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1-\varepsilon\xi_x) - \varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\eta_x \text{ und}$$
$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial y_1^2} = -\varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\xi_y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1-\varepsilon\eta_y).$$

§ 3. Der Satz *a*.

Das Ovaloïd ist bestimmt, wenn das Krümmungsmaß eine gegebene Function von p und q ist. Dies wollen wir jetzt zeigen.

1. Wir setzen

$$\xi = \xi^{(m)} + \xi^{(m+1)} + \cdots$$
$$\eta = \eta^{(m)} + \eta^{(m+1)} + \cdots$$
$$\zeta = \zeta^{(m)} + \zeta^{(m+1)} + \cdots$$

wo $\xi^{(m)}$ eine homogene Funktion m-ter Ordnung von x und y ist.

Außerdem legen wir in dem betrachteten Punkt das natürliche Coordinatensystem[1]) zu Grund.

Die Forderungen $p = p_1$, $q = q_1$ ergeben dann die Gleichungen

$$\xi_x^{(m)} ax + \eta_x^{(m)} by - \xi_x^{(m+1)} = 0$$
$$\xi_y^{(m)} ax + \eta_y^{(m)} by - \zeta_y^{(m+1)} = 0.$$

Wenn man nun die erste Gleichung nach y, die zweite nach x differenziert und von der ersten subtrahiert, so kommt

A) $$a\xi_y^{(m)} - b\eta_x^{(m)} = 0.$$

Nun verlangen wir noch, daß $\frac{r_1 t_1 - s_1^2}{(1+p_1^2+q_1^2)^2} = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$ ist, oder daß $r_1 t_1 - s_1^2 = rt - s^2$ ist ($p = p_1$, $q = q_1$ ist schon erfüllt).

Entwickelt man nun den Ausdruck

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1-\varepsilon\xi_x) - \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\varepsilon\eta_x\right]$$
$$\cdot\left[-\varepsilon\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\xi_y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(1-\varepsilon\eta_y)\right]$$
$$-\left[+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1-\varepsilon\xi_x)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\varepsilon\eta_x\right]^2$$

1) Vergl. § 3 der oben citierten Arbeit.

vernachlässigt höhere Potenzen von s und berücksichtigt außerdem bei dem Coefficienten der ersten Potenz von s nur die Glieder niedrigster Ordnung, so bleibt

B) $$r_1 t_1 - s_1^2 = ab + s(-\xi_x^{(m)} - \eta_y^{(m)}) + \cdots.$$

Soll nun die Krümmung invariant sein, so muß

B) $$\xi_x^{(m)} + \eta_y^{(m)} = 0$$

sein.

Aus A) und B) zusammen folgt noch

C) $$a\xi_{yy}^{(m)} + b\xi_{xx}^{(m)} = 0$$

D) $$a\eta_{yy}^{(m)} + b\eta_{xx}^{(m)} = 0.$$

Da nun eine homogene Form, welche die Differentialgleichung

$$af_{yy} + bf_{xx} = 0$$

erfüllt, immer indefinit ist, so folgt hieraus:

ξ und η sind immer indefinit. (Bei ungeradem m sind sie selbstverständlich indefinit).

2. Untersuchen wir nun die Form $\zeta^{(m+1)}$ mit der die Potenzentwickelung von ζ beginnt.

Ist $m = 1$, so haben wir, wenn

$$\xi^{(1)} = \alpha x + \beta y$$
$$\eta^{(1)} = \gamma x + \delta y$$

ist, wegen der Gleichung

A) $$\alpha\beta - b\gamma = 0$$

und B) $$\alpha + \delta = 0,$$

also

$$\xi^{(1)} = \alpha x + \beta y$$
$$\eta^{(1)} = \frac{\alpha\beta}{b} x - \alpha y$$

Hieraus folgt

$$\zeta_x^{(2)} = \xi_x^{(1)} ax + \eta_x^{(1)} by = \alpha a x + a\beta y$$
$$\zeta_y^{(2)} = \xi_y^{(1)} ax + \eta_y^{(1)} by = \beta a x - \alpha b y$$
$$\zeta^{(2)} = \tfrac{1}{2}(x\zeta_x^{(2)} + y\zeta_y^{(2)}) = \tfrac{1}{2}\alpha(ax^2 - by^2) + a\beta xy$$

$\zeta^{(2)}$ ist also indefinit.

Wenn dagegen $m = 2$, beginnt ζ mit Gliedern dritter Ordnung, die natürlich indefinit sind.

Wir wollen jetzt weiter zeigen, daß auch im Fall $m > 2$ die Glieder niedrigster Ordnung von ζ, gegeben durch $\zeta^{(m+1)}$, immer indefinit sind.

Dies ist einfach zu zeigen: Aus

$$\zeta_x^{(m+1)} = \xi_x^{(m)} ax + \eta_x^{(m)} by$$

und

$$\zeta_y^{(m+1)} = \xi_y^{(m)} ax + \eta_y^{(m)} by$$

folgt durch Differentiation

$$\zeta_{xx}^{(m+1)} = \xi_{xx}^{(m)} ax + \xi_x^{(m)} a + \eta_{xx}^{(m)} by$$

bez.

$$\zeta_{yy}^{(m+1)} = \xi_{yy}^{(m)} ax + \eta_y^{(m)} b + \eta_{yy}^{(m)} by.$$

Wenn man die erste Zeile mit b, die zweite mit a multipliciert und beide zu einander addiert, so erhält man wegen der Relationen C) und D).

$$b\zeta_{xx}^{(m+1)} + a\zeta_{yy}^{(m+1)} = ab(\xi_x^{(m)} + \eta_y^{(m)}),$$

oder, wenn man die Operation

$$b\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ mit } \Delta_{b,a} f \text{ bezeichnet}$$

$$\Delta_{b,a}\xi^{(m+1)} = ab(\xi_x^{(m)} + \eta_y^{(m)}).$$

Da nun weiter

$$\Delta_{b,a}\xi_x^{(m)} = \frac{\partial}{\partial x}\Delta_{b,a}\xi_x^{(m)} = 0 \text{ ist,}$$

und ebenso

$$\Delta_{b,a}\eta_x^{(m)} = 0,$$

so folgt

$$\Delta_{b,a}\Delta_{b,a}\zeta^{(m+1)} = 0.$$

Nun kann man aber leicht zeigen, daß eine Form indefinit ist nicht nur wenn $\Delta_{b,a} f = 0$, sondern auch wenn $\Delta_{b,a}\Delta_{b,a} f = 0$ ist[1]).

Also sehen wir $\zeta^{(m+1)}$ ist immer indefinit.

3. Wenn wir uns jetzt die Hülfsfläche $\xi\eta\zeta$ construieren, und durch einen Punkt der Fläche eine Ebene legen (wir können immer annehmen, dieser Punkt sei der Nullpunkt), so sehen wir, daß diese Ebene die Fläche schneidet.

Es sei nämlich $\alpha\bar{\xi} + \beta\bar{\eta} + \gamma\bar{\zeta} = 0$ die Ebene, so folgt daraus, daß die Glieder niedrigster Ordnung der Reihenentwickelung, die man erhält, wenn man für $\bar{\xi}\ \bar{\eta}\ \bar{\zeta}$ die Reihenentwickelungen $\xi\eta\zeta$ ein-

1) Dieser Nachweis wird an anderer Stelle publiciert werden.

setzt, immer eine indefinite Form geben weiter, daß jede Ebene die Fläche schneidet, wenn sie einen Punkt mit ihr gemein hat [1]).

Die Fläche ist also unbegrenzt, während sie andererseits doch ganz im Endlichen bleibt, weil $\xi\eta\zeta$ analytische Functionen sind und überall endlich.

4. Hierin liegt ein Widerspruch, und somit ist in dem Sinne, wie er in § 1. Nr. 2 genau angegeben ist, der Satz bewiesen:

Ein Ovaloïd ist vollkommen bestimmt, wenn das zu jeder Normalrichtung gehörige Krümmungsmaß gegeben ist.

§ 4. Der Satz *b*.

1. Ganz analog wird der Beweis des Satzes *b* zu führen sein.

Es treten hier nur zu der Gleichung A andere Gleichungen B′C′D′E′ hinzu, die aus der Forderung abzuleiten sind, daß die mittlere Krümmung invariant ist.

Diese Forderung drückt sich so aus:

Es soll

$$\begin{aligned} & r_1(1+q_1^2) - 2p_1q_1s_1 + t_1(1+p_1^2) \\ = \; & r\,(1+q^2) - 2pqs \quad + t\,(1+p^2) \end{aligned}$$

sein. Den Nenner des Ausdrucks, welcher die mittlere Krümmung angiebt, haben wir auf beiden Seiten fortgelassen, da er schon beiderseits derselbe ist.

2. Wenn wir jetzt für $r_1 s_1 t_1$ ihre Werte einsetzen, so bekommen wir als Glieder niedrigster Ordnung, die außerdem den Faktor ε haben, nur

$$\varepsilon(-a\xi_x^{(m)} - b\eta_y^{(m)}).$$

Soll die mittlere Krümmung invariant sein, dann muß also

B′) $$a\xi_x^{(m)} + b\eta_y^{(m)} = 0 \text{ sein.}$$

Dies giebt zusammen mit der Gleichung

A) $$a\xi_y^{(m)} - b\eta_x^{(m)} = 0$$

die folgenden beiden Gleichungen

C′) $$\xi_{xx}^{(m)} + \xi_{yy}^{(m)} = 0$$

D′) $$\eta_{xx}^{(m)} + \eta_{yy}^{(m)} = 0.$$

Hieraus folgt wieder, daß $\xi^{(m)}$ und $\eta^{(m)}$ indefinit sind.

---

1) Vgl. § 4 der citierten Arbeit.

Genau so, wie im vorigen Paragraphen, kann man auch wieder zeigen, daß $\xi^{(m+1)}$ indefinit ist.

Aus den Gleichungen B′ und A folgt nämlich für $m = 1$, daß wenn

$$\xi^{(1)} = \alpha x + \beta y \text{ ist,}$$

$$\eta^{(1)} = +\frac{a\beta}{b} x - \frac{a\alpha}{b} y \text{ ist.}$$

Demnach wird

$$\zeta_x^{(2)} = \alpha a x + \frac{a\beta}{b} b y$$

$$\zeta_y^{(2)} = \beta a x - a\alpha y,$$

also

$$\zeta^{(2)} = \alpha a \frac{(x^2 - y^2)}{2} + \beta a x y$$

$\xi^{(2)}$ ist also indefinit.

Wenn $m > 2$ ist, wird man auf die Gleichung geführt

$$\Delta\Delta\xi^{(m+1)} = 0$$

aus der wieder folgt, daß $\xi^{(m+1)}$ auf jeden Fall indefinit ist. —

3. Im übrigen ist das Schlußverfahren genau wie im vorigen Paragraphen, und es ist also hiermit auch der Satz *b* bewiesen.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß der ganze Beweis die Existenz eines den vorgeschriebenen Bedingungen genügenden Ovaloïdes voraussetzt. Es kommt bei dem Beweis eben nicht darauf an, diese Existenz zu beweisen, sondern vielmehr, zu zeigen, daß, wenn es ein den Bedingungen genügendes Ovaloïd giebt, dieses das einzige ist.

Leipzig, im April 1899.

Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen.

Sechster Bericht

Von

J. Orth.

Vorgelegt in der Sitzung vom 24. Juni 1899.

1. Schon in meinem 4. Bericht vom 29. Mai 1897 habe ich der Arbeiten von Grawitz gedacht, in welchen sich derselbe bestrebt, den Nachweis zu erbringen, daß die Ueberlebensfähigkeit der Gewebe auch der höheren Thiere und des Menschen viel größer ist, als man seither angenommen hat, und daß einzelne Gewebe, z. B. Hornhaut, selbst viele Tage nach dem Tode ihres Trägers noch so lebendig d. h. erholungsfähig sein könnten, daß ihre Zellen unter geeigneten Bedingungen sich sogar lebhaft vermehrten d. h. mehr leisteten als unter gewöhnlichen Verhältnissen im lebenden Körper. Grawitz hat in einer dankenswerthen Zusammenstellung der in der Litteratur vorhandenen auf die Lebensfähigkeit belebter Materie bezüglichen Angaben auch auf die Spallanzanischen Animalcula resuscitantia hingewiesen, welche, auch wenn sie längere Zeit hindurch völlig eingetrocknet waren, durch Anfeuchtung wieder zum Leben d. h. zur Leistung von Lebensäußerungen gebracht werden können. Wenngleich Grawitz sicherlich selbst nicht daran denkt, aus dem Verhalten dieser niedersten Thiere Schlüsse auf die Zellen höherer Thiere zu ziehen, wissen wir doch z. B. schon sehr lange, welcher Unterschied in der Regenerationsfähigkeit selbst in der Wirbelthierklasse zwischen höheren und niederen Gruppen besteht, so erscheint es mir doch von allgemein biologischem Standpunkte aus wichtig und angebracht zu sein, auf den von Davaine scharf be-

tonten Umstand die Aufmerksamkeit zu lenken, daß die Wiederauflebensfähigkeit keineswegs allen Arten der Gruppen der Animalcula resuscitantia zukommt. Davaine faßt in den Comptes rendus de l'acad. des sciences, 6. Juni 1859 das Resultat seiner Untersuchungen bei Rotiferen, Tardigraden, Nematoïden, Infusorien und einer Anzahl pflanzlicher Organismen dahin zusammen, daß die Thiere und Pflanzen, welche zu den untersuchten Familien gehören, in 2 Gruppen getheilt werden müssen: die Arten, welche dauernd im Wasser leben, besitzen die Eigenschaft wiederaufzuleben nicht, selbst wenn sie nur für kurze Zeit ausgetrocknet wurden, dagegen besitzen diejenigen Arten, welche in Substanzen leben, die abwechselnd trocken und feucht sind, diese Eigenschaft, selbst wenn die Austrocknung auf eine verhältnißmäßig sehr lange Zeit ausgedehnt wurde.

Daraus folgt, daß es sich bei dieser Lebenszähigkeit keineswegs um eine allgemeine Eigenschaft der Gewebe dieser Lebewesen handelt, sondern um eine vermuthlich erworbene Anpassung an ganz besondere Lebensbedingungen einzelner Arten, also um einen Ausnahmefall, der nicht geeignet ist, für ein allgemeines Lebensgesetz als Beispiel zu dienen.

Betrachtet man nun die von Grawitz und seinem Schüler Busse beigebrachten Beweise von der Ueberlebensfähigkeit zelliger Elemente der höheren Thiere und des Menschen, so muß es sofort auffallen, daß es sich, von der streitigen Hornhaut abgesehen, ausschließlich um functionelle Leistungen der Körpertheile (Bewegung von Flimmerhaaren an Epithelzellen, amöboide Zellenbewegung, Contraction von Muskeln etc.) handelt, daß aber kein einziges Beispiel von formativer Leistung — immer von den Hornhautexperimenten abgesehen — beigebracht werden konnte, während doch der ganze Zweck der Mittheilungen darauf hinausläuft, die Fähigkeit von im vulgären Sinne todten Geweben zu formativer Leistung, zu Zellwucherung und sogar weit über das normale Maß hinausgehender Zellwucherung plausibel zu machen. Es ist klar, daß zu einer solchen Leistung eine ganz andere Assimilationsfähigkeit nothwendig ist, als zur Leistung einer bloß functionellen Thätigkeit: daß wochenlang nach der Exstirpation an Flimmerepithelkystomen des Ovariums noch Flimmerbewegung bemerkbar ist, daß todtenstarre Muskeln unter Umständen wieder zu einer Contraction veranlaßt werden können, und ähnliche Beobachtungen können nichts wesentliches beitragen zur Stütze der Behauptung, daß eine verschimmelte Hasenhornhaut 12 Tage nach dem Tode des Hasen — nicht etwa in einem lebenden Hasen — sondern in

dem Lymphsack eines Frosches wieder so lebendig geworden sei, daß ihre Zellen sich durch regelrechte Theilung vermehrt hätten. Nur Beobachtungen über formative Vorgänge an den Gewebszellen können für diese Frage von Bedeutung sein.

Da scheint mir denn vor allem die Frage einer endgültigen Entscheidung zu bedürfen, wie verhalten sich die in formativer Thätigkeit begriffenen Zellen bei dem Tode ihres Trägers bezw. bei der Entfernung des betreffenden Gewebes vom lebenden Körper. Die ursprünglich auch von Flemming geäußerte Meinung, daß die beim Tode vorhandenen Kerntheilungsvorgänge noch abliefen, ist durch spätere Untersuchungen (von Schenk, Ribbert, Hammer, Penzo u. a.) als unrichtig nachgewiesen worden und O. Israël hat schon ganz richtig bemerkt, daß der Befund oder Nichtbefund von Mitosen nach dem Tode zu einem wesentlichen Theile von dem angewandten Conservirungsmittel abhängig ist. Seitdem in meinem Institute von der Formolhärtung ein ausgiebiger Gebrauch gemacht wird, ist es mir aufgefallen — und ich habe davon auch gelegentlich in einer Veröffentlichung (Berl. klin. Woch. 1896) Mittheilung gemacht — wie häufig wir Mitosen nicht nur an frischen, sondern an viele Tage alten Präparaten, insbesondere an Geschwülsten, zu sehen bekommen. Das schien mir zu beweisen, daß die beim Tode oder bei der Abtragung in den Geschwulstzellen vorhandenen Kerntheilungsvorgänge jäh unterbrochen werden, daß also die Zellen, was ihre formativen Leistungen angeht, sehr empfindlich, sehr lebensschwach (s. v. v.) sind, womit nicht recht in Einklang zu bringen ist, was Grawitz von der Erholungsfähigkeit absterbender Gewebe behauptet hat. Da m. E. die Frage nach dem Verhalten der mitotischen Vorgänge beim und nach dem Tode oder nach der Entfernung der Theile aus dem lebenden Körper besonders in Rücksicht auf die Geschwülste noch nicht genügend systematisch untersucht war, so habe ich den Volontär-Assistenten am Institut Herrn Dr. Wolff veranlaßt, eine derartige Untersuchung vorzunehmen, über welche derselbe demnächst unter Vorführung von Abbildungen im Archiv für klinische Chirurgie berichten wird.

Dr. Wolff hat circa 60 Präparate untersucht, zum guten Theil ausgeschnittene Geschwülste, welche er theilweise sofort nach der Operation in Arbeit nehmen konnte. Er hat sobald wie möglich, dann in regelmässigen Zeitabschnitten, nach Tagen und Wochen (längste Zeit 6 Wochen) immer wieder Stücke derselben Präparate untersucht, welche theils im Eisschrank, theils bei Zimmertempe-

ratur, theils auch in feuchter Kammer im Brutofen aufbewahrt wurden. Bei der letzten Aufbewahrungsart war nach 24 Stunden eine befriedigende Färbbarkeit der Präparate nicht mehr vorhanden, aber bis dahin konnte auch hierbei festgestellt werden, was aus der Untersuchung der anders aufbewahrten Stücke regelmäßig hervorging, daß die in menschlichen Geweben, seien es pathologische oder normale Theile, vorhandenen Mitosen nach dem Tode oder der Exstirpation so lange — und unter günstigen Bedingungen noch länger nachweisbar sind, als es überhaupt möglich ist, die feinere Structur der übrigen Gewebstheile zu erkennen. Die Zahl und Art der Mitosen im nach verschieden langer Zeit fixirten Präparat sind völlig die gleichen wie im lebenswarm fixirten. Das Aussehen der Mitosen ändert sich allerdings mit der Zeit, sie verklumpen, werden undeutlicher, aber auch in dieser Beziehung besteht keine Regelmäßigkeit, denn W. konnte an einem 6 Wochen nach der Exstirpation fixirten Brustdrüsenkrebs noch die schönsten Mitosen, theilweise sogar mit achromatischer Figur nachweisen. Um ein unvollständiges Ablaufen des Theilungsprozesses handelt es sich danach bei jenen Verklumpungen etc. nicht, sondern um cadaveröse Veränderungen, die je nach Umständen früher oder später sich einstellen.

Wie sind nun diese Befunde zu erklären? Handelt es sich um eine Unterbrechung der Theilungsvorgänge oder treten auch nach dem Tode oder der Abtragung immer neue Theilungen auf? An das letzte wird im Ernste Niemand denken, wenn berücksichtigt wird, daß nach Wochen noch dieselbe Menge und dieselben Formen der Mitosen nachweisbar sind wie im Anfang, daß die Art der Aufbewahrung der frischen Präparate auf die Zahl der Mitosen keinen Einfluß hat, daß die Mitosen noch färbbar sein können, wenn bereits die ruhenden Kerne ihre Färbbarkeit verloren haben, wenn die feinere Structur der übrigen Gewebstheile schon unerkennbar wird, ja wenn der Theil schon in Fäulniß übergegangen ist. Das kann nur erklärt werden durch die Annahme, daß die Kerntheilungsvorgänge unterbrochen wurden und zwar ganz jäh, da sich in späteren Zeiten nicht etwa nur die späteren Phasen, sondern auch die einfachen in genau demselben Verhältniß wie im frischen Präparat vorfanden.

Um noch einen weiteren Beweis beizubringen, hat Wolff frische Zellen mit Mitosen im hängenden Tropfen auf dem geheizten und ungeheizten Objekttisch bis 48 Stunden lang beobachtet, aber niemals eine fortschreitende Veränderung an den Mitosen wahrnehmen können.

Schon bei seinen Geschwülsten hatte W. gelegentlich noch bedeckende Haut untersuchen können und auch in ihr sowohl bei frisch wie nach längerer Aufbewahrung fixirten Präparaten Mitosen gefunden. Da das im Widerspruch stand mit den Angaben von Wentscher, dessen Transplantationsversuche mit bis 21 Tage aufbewahrten Hautläppchen den Grawitz'schen Angaben eine Stütze zu geben schienen, so untersuchte Wolff auch Thiersch'sche Hautläppchen vom Oberschenkel eines Lebenden und fand sowohl an frischen wie an bis 26 Tage nach Wentschers Art aufbewahrten Stückchen Mitosen, fast in jedem Schnitt eine, manchmal Gruppen von 2 und 3. Nun mag ja die Zahl der Mitosen an bestimmten Stellen der Oberhaut individuell und nach den Verhältnissen großen Schwankungen unterliegen und es soll keineswegs behauptet werden, daß in anderen Fällen die gleichen Erfolge erwartet werden müßten, aber jedenfalls ist doch dadurch bewiesen, daß auch in der Haut Mitosen sich nach der Entfernung derselben vom Lebenden erhalten können, sogar in Gruppen, so daß man also, wenn man an einem transplantirten Stückchen Haut Mitosen findet, nicht unbedingt annehmen darf, daß diese Mitosen neuentstandene sein müßten. Damit soll nicht gesagt sein, daß die Wentscher'schen Beobachtungen ihre Beweiskraft ganz verloren hätten, aber gemindert ist dieselbe zweifellos und jedenfalls steht das eine fest, daß die formative Thätigkeit der Zellen, insbesondere auch der mit so ganz besonders großer Wachsthums- und demnach Lebensenergie ausgestatteten Geschwulstzellen durch den Eintritt des allgemeinen Todes oder durch die Entfernung aus dem lebenden Körper ganz plötzlich unterbrochen wird und daß es deshalb im höchsten Grade unwahrscheinlich ist, daß ganz allgemein im Absterben begriffene oder gar dem wirklichen Tode nahe Zellen durch künstliche Mittel zu erneuter formativer Thätigkeit angeregt werden könnten. Daran kann m. E. auch nichts geändert werden, wenn es in einzelnen Fällen unter bestimmten Verhältnissen sich anders verhält; diese muß man dann eben bis auf weiteres als Ausnahmefälle betrachten und aus besonderen Umständen zu erklären versuchen, wie für das Wiederaufleben der eingetrockneten Animalcula resuscitantia Davaine ganz besondere Lebensverhältnisse als maßgebend nachgewiesen hat.

Mit dieser Annahme steht nicht in Widerspruch der einzige sichere Beweis für die formative Leistungsfähigkeit von Zellen noch mehrere Tage nach dem Tode ihres Trägers, welcher aus dem Grawitz'schen Institut von Dr. Grohé jüngst, nachdem das Vorstehende bereits niedergeschrieben war, in Virchow's Archiv

veröffentlicht worden ist. Grohé hat Periost von Kaninchen, zwar nicht 12 oder noch mehr Tage, aber immerhin doch 100 Stunden nach dem Tode des Thieres, nachdem es zwischen die Muskeln eines lebenden Kaninchens transplantirt worden war, noch Knochenbildung bewirken sehen, — aber die Experimente gaben bei Katzen und Meerschweinchen durchweg negative Resultate und gelangen bei Kaninchen mit Sicherheit nur unter ganz besonderen Verhältnissen, nämlich wenn das Periost auf Thiere von dem gleichen Wurf transplantirt worden war. —

2. Zu der jetzt so viel besprochenen Frage nach der Betheiligung von Resten des Wolff'schen Körpers an adenomatösen Neubildungen hat Dr. Aschoff aus dem Beobachtungsmaterial des Institutes einen Beitrag geliefert.

Bei einer 42jährigen Frau war eine gut mandelgroße Geschwulst mit bis erbsengroßen Cysten entfernt worden, welche sich in der Furche neben der linken großen Schamlippe unterhalb eines 10 Jahre lang wegen Schenkelbruchs getragenen Bruchbandes entwickelt hatte. Die mikroskopische Untersuchung ergab von kleinen unbedeutenden Abweichungen abgesehen im wesentlichen die Befunde, welche v. Recklinghausen für die von Resten des Wolff'schen Körpers seiner Meinung nach herrührenden Adenome des Uterus angegeben hat, nur fehlte gänzlich das Muskelgewebe, es handelte sich also nicht wie gewöhnlich um ein Adenomyom, sonderm um ein Adenofibrom, das aus Urnierenresten des Leistenbandes jenseits der Muskelausstrahlung des Lig. rotundum hervorgegangen sein muß, da weder die Bartholini'sche Drüse noch der Müller'sche oder Wolff'sche Gang für die Erklärung in Betracht kommen können. Dabei muß A. bleiben, obwohl er im Leistenband bei 4 männlichen und ebensovielen weiblichen Föten keine Urnierenreste aufzufinden vermochte.

Zwei andere mit dem Wolff'schen Körper in Verbindung zu bringende Geschwülste stammen aus dem breiten Mutterband. 1. Ueber faustgroße, theils feste theils cystische Geschwulst in dem rechten Lig. latum einer 62jährigen Frau zwischen abdominalem Tubenabschnitt und Eierstock gelegen, ein Parovarium nicht nachweisbar; die Geschwulst erweist sich als eine Combination einer Cyste und eines Adenomyofibroms des Parovarium, ein Adenomyom des sexualen Abschnitts der Urniere. 2. Große theils solide theils cystische Geschwulst des linken breiten Mutterbandes einer 48jähr. Frau, welche am freien Rande des Bandes beginnend an der Stelle des Parovariums gelegen ist, aber bis

zur Uteruskante sich erstreckt und noch in die Uteruswand selbst eingelagert ist, also genau im Bereiche der ursprünglichen Anlage der Urnieren und des Urnierenganges gelegen ist. Nach dem mikroskopischen Befund ist dieselbe als ein Adenomyom anzusprechen, bei dem ein Hinausgewachsensein aus dem Uterus in das Band sehr unwahrscheinlich ist, vielmehr eine Entstehung im Ligament aus dem Wolff'schen Körper, dem Geschlechts- wie dem secretorischen Theil angenommen werden muß.

Nebenbei wird noch ein Befund an einer Tube erwähnt, den A. durch Verlagerung von Urnierenkanälchen in die Tubenwand erklärt. (Monatschr. f. Geb. u. Gyn. IX.) —

3. In seinen Beiträgen zur Anatomie der Schwangerschaft bespricht Dr. Aschoff zunächst die Verhältnisse bei der Eileiterschwangerschaft. Ein Operationspräparat von solcher Schwangerschaft in der 2. bis 3. Woche, bei dem der Zusammenhang der Placenta mit der Tubenwand noch erhalten war, gab Veranlassung, auf Grund der neu gewonnenen Kenntnisse über die normale Placentation die Vorgänge bei der extrauterinen Placentabildung genauer zu prüfen. Auf Grund sorgsamer Untersuchung kommt A. zu folgenden Vorstellungen: Es fehlt jede Wucherung des mütterlichen Gewebes im Sinne der uterinen Deciduabildung, auch an der Placentarstelle; es ist aufs klarste aus einer Wucherung des Epithels der Zottenspitzen, und zwar sowohl der Langhans'schen Zellen wie des Syncytium, welches sich in Einzelzellen auflösen und mit jenen untermischen kann, eine fötale Saugplatte hervorgegangen, welche sich an das Tubengewebe angelegt und die dünne Schleimhaut, die ganze Muskelschicht bis auf dünne Reste durchwachsen hat und bereits bis in die gefäßreiche Subserosa vorgedrungen ist. Ueberall wo die fötalen Zellen auf Gefäße treffen, wird die dem Tubenlumen zugewandte Seite zunächst zerstört, sodaß die Gefäßwand zur Hälfte von normalem Gewebe, zur Hälfte von den fötalen Zellenmassen gebildet wird, die schließlich auch in die Gefäßlumina eindringen und die Gefäße eröffnen. Eine deciduale Reflexa ist nicht vorhanden, überhaupt keine vollständige, sondern nur eine partielle Reflexa, welche durch je eine Falte von Schleimhaut (mit Muskulatur) gebildet wird, die etwas gedehnt ist und außen mit gewöhnlichem Epithel, nach dem Ei zu mit dicken Lagen von fötalen Zellen bekleidet ist, welche stellenweise die ganze Falte durchsetzen. Beim Tuben-Abort wird die Placenta zerrissen, fötales Gewebe bleibt wachsthumsfähig in der Tubenwand zurück und

gibt zu immer neuen Blutungen Veranlassung. An der Placentarstelle ist die Tubenwand durch die weitgehende Zerstörung seitens der fötalen Zellen zur Ruptur vorbereitet.

Weitere 3 Fälle von Eileiterschwangerschaft bestätigten diese Schlußfolgerungen und zeigten, daß wirklich an der Placentarstelle die Rupturen erfolgen, daß aber die Rupturstellen durch Peritonealschwarten überdeckt sein können. Eine auffällige Hypertrophie der Tubenmuskulatur außerhalb der Placentarstelle fand A. in keinem seiner Präparate. Es fehlt also bei der Tubar-Gravidität jede spezifische Schwangerschaftsveränderung in der Tubenwand, das Ei zerstört rücksichtslos die ganze Tubenwand und bereitet sich so selbst den Tod.

In einem zweiten Beitrag wird das Vorkommen von Drüsen in der Muskulatur des schwangeren Uterus an einer Anzahl von Präparaten geprüft, besonders in Rücksicht auf die von Pels Leusden verfochtene Behauptung, daß die Einwanderung der syncytialen Zellen in die Uteruswandung, speziell in die Muskulatur die Bedeutung besitze, daß daselbst Material aufgespeichert werde, von dem aus die im Laufe der Schwangerschaft mehr und mehr an Drüsenresten verarmende Placentarstelle wieder mit neuen Drüsen versorgt werden könne. Wenn dem so wäre, so spräche das für eine mütterliche Herkunft des Syncytium. Aschoff muß nun nach seinen Befunden für die Placentarfläche und einen Theil der Decidua vera eine Auflockerung der obersten Muskelschichten durch wuchernde Schleimhaut in den ersten Monaten der Schwangerschaft annehmen; später kann durch die Ausdehnung die Schleimhaut-Muskelgrenze wieder gradlinig werden, aber die bei der Geburt auftretenden Contractionen lassen die ursprünglichen Verhältnisse, das Tiefenwachsthum der Drüsen wieder hervortreten. Jedenfalls muß es A. entgegen Pels Leusden für das Normale halten, daß die Uterusschleimhaut an der Placentarstelle am Ende der Schwangerschaft genügende Drüsenreste für die Regeneration besitzt, und da er auch sonstige gewichtige Gründe, welche Pels Leusden für seine Meinung vorgebracht hat, widerlegt zu haben glaubt, ein direkter Beweis für die Abstammung von Drüsenschläuchen aus syncytialen Riesenzellen aber nicht erbracht ist, so kommt er, obwohl er die Beschreibungen von Formveränderungen der syncytialen Zellen im Puerperium bestätigen kann, doch zu dem Schluß, daß die Frage nach der Bedeutung dieser chorialen Riesenzellen in der Muskulatur des puerperalen Uterus immer noch ihrer Beantwortung harrt. (Ziegler's Beitr. XXV.) —

4. Dr. Aschoff hat weiterhin einen Fall von angeborenem Schilddrüsenmangel bei einem halbjährigen Kinde weiblichen Geschlechts bezüglich des Vorkommens von Nebenschilddrüsen genauer untersucht. Das Kind hatte trotz Fehlens der Schilddrüse am regelmäßigen Ort im Leben nur ganz geringe Zeichen von Myxödem dargeboten, das sich anatomisch überhaupt nicht sicher nachweisen ließ. Der Tod war plötzlich ohne vorausgegangene Krankheitserscheinungen erfolgt. Die Sektion ergab eine Vergrößerung der Hypophysis (gew. 0,5 g gegen 0,13 norm.), hämorrhagische Infiltration beider Nebennieren, klein-cystische Umwandlung (Follikelvergrößerung) beider Eierstöcke, geringe Verbreiterung der Wucherungszone an der Knochenknorpelgrenze, rothes Knochenmark, Enteritis nodularis. Die Schilddrüse fehlte völlig, in der Schilddrüsengegend waren nur 2 kleine halberbsengroße Bläschen sichtbar, dagegen wurde an einem Längsschnitt durch die Zungenwurzel eine zwischen Foramen coecum und Zungenbein gelegene erbsengroße Geschwulst von dem Aussehen des Schilddrüsengewebes gefunden. Mikroskopisch erwies sich dieselbe aus vielbuchtigen cystischen Hohlräumen zusammengesetzt, welche mit einer homogenen, durch Hämatoxylin nur schwach zu färbenden Masse, die auch glänzende Kugeln enthielt, gefüllt waren. Nach abwärts in die Zungenmuskulatur hinein verliefen noch größere, mit Cylinderepithel bekleidete Kanäle, in welche zahlreiche wie Schleimdrüsen gebaute Drüsenkörper einmündeten. Nach der Schleimhaut zu sandte die Geschwulst einen mit Plattenepithel ausgekleideten, mit Epithelperlen gefüllten zapfenförmigen Fortsatz.

A. glaubt, daß diese Geschwulst aus dem von M. B. Schmidt genauer geschilderten secundären Drüsensystem des Ductus lingualis hervorgegangen ist; vielleicht hat sie im Verein mit der hypertrophischen Hypophysis eine vicariirende Thätigkeit für die fehlende Hauptschilddrüse ausgeübt.

Reihenschnitte durch die Halsorgane zeigen, daß auch eine seitliche Schilddrüsenanlage völlig fehlt. Es finden sich nur die schon vorher erwähnten cystischen Gebilde, hinter welchen je ein typisches, mit den Schilderungen von Sandstroem, Kohn u. A. völlig übereinstimmendes Epithelkörperchen liegt. Die Bläschen bestehen aus einem größeren und mehreren kleineren mit schleimähnlichen Massen gefüllten Hohlräumen. In den größeren Hohlraum münden mehrere schleimdrüsen-ähnliche Gebilde. Gleichartige Befunde sind von Maresch an dem einzigen bisher genauer untersuchten Fall von angeborenem Schilddrüsenmangel erhoben worden. In Uebereinstimmung mit Maresch erklärt auch Aschoff,

daß es sich um Reste der 4. Kiementasche handelt, wofür außer dem schon von Maresch betonten Befund von Schleimdrüsen die von A. gefundenen Bündel glatter Muskeln in der Cystenwand, wie auch Knorpelspangen um die zu den Cysten gehörigen Drüsenanlagen deutlich genug sprechen. Die hinter den Cysten gelegenen Epithelkörperchen sind wohl ebenfalls von der 4. Kiementasche abzuleiten. Die von der 3. Kiementasche abstammenden sog. unteren Epithelkörperchen wurden nicht mehr am Präparat gefunden, wahrscheinlich waren sie bei der Unterbindung der Halsorgane und Herausnahme der Brustorgane im Sektionscurs mit entfernt worden. —

5. Nur ihre Vollendung hat im Institut eine Untersuchung über Kapselbacillen erfahren, welche Herr L. W. Strong in Boston unter Proff. Smith und Councilman begonnen hatte. Es handelt sich um die Frage, ob eine Gruppenbildung in Rücksicht auf das Gas- und Säurebildungsvermögen der Kapselbacillen in verschiedenen Zuckerarten (Rohr-, Trauben- und Milchzucker) möglich sei. Das Ergebniß bestand darin, daß es, wie auch Wilde angegeben hat, 2 Gruppen giebt mit folgenden Arten und Eigenschaften:

1. Bac. pneumoniae Friedländer, B. ozaenae Fasching, B. sputigenus crassus oder mucosus capsulatus, B. Wright und Mallory und vielleicht B. rhinoscleromatis. Kolonien erst mit dem Alter weiß; Kapseln im Thierkörper leicht zu färben; auf künstlichen Nährböden Pseudokapseln; Gasbildung reichlich in Rohrzucker, weniger in Traubenzucker, wenig oder gar nicht in Milchzucker; keine Säurebildung in Milchzuckerbouillon; keine Milchgerinnung.

2. B. aërogenes Escherich, Bac. Pfeiffer, Bac. capsulatus Kruse (und wahrscheinlich noch mehrere andere). Kolonien von Anfang an weißlich, Kapseln auch im Thierkörper schwer färbbar. keine Pseudokapseln in künstlichen Nährböden, reichliche und beständige Gasbildung in allen 3 Zuckerarten, desgleichen Säurebildung, schnelle Milchgerinnung. (Cbl. f. Bakt. XXV.) —

6. Herr Becher, s. Z. Volontär-Assistent am Institut hat zu der Kenntniß von dem Vorkommen von Riesenzellen in Krebsen durch Mittheilung von 4 neuen Fällen einen Beitrag geliefert. Die Geschwülste, sämmtlich durch Operation gewonnen, boten größtentheils auch sonst noch interessante Verhältnisse.

Es ist schon wiederholt das Vorkommen von Riesenzellen um Perlkugeln in epithelialen Wucherungen und auch das Zer-

sprengt- und Zerstörtwerden epithelialer Massen durch Riesenzellen beschrieben worden, z. B. durch Denecke bei einem verkalkten Epitheliom in der Festschrift unseres Institutes für Virchow, 1893, durch Zeroni (aus der hiesigen Ohrenklinik) in cholesteatomatösen Ohrpolypen, Arch. f. Ohrenhlk. 42, 1897 (leider von Becher zu citiren vergessen), aber bei einem richtigen, zweifellosen, bösartigen Epitheliom, einem Plattenepithelkrebs scheint diese Art Naturheilung bisher nicht beobachtet — oder wenigstens nicht beschrieben worden zu sein. Als ich daher im Demonstrationscurs diese Beobachtung gemacht hatte, hielt ich sie für interessant genug, um die Sache durch Herrn Becher weiter verfolgen zu lassen, umsomehr als bald nacheinander 2 hierhergehörige Präparate dem Institut zukamen.

Im 1. Falle handelt es sich um einen älteren Mann, bei dem vor 38 Jahren eine mit ausgedehnter Weichtheilverletzung verbundene Quetschung des Fußes stattgefunden hatte; die Verletzung war nicht geheilt und jetzt zeigt sich ein großes Cancroid an der Ferse, welches den Calcaneus nahezu gänzlich zerstört hat und noch weiter nach allen Seiten vorgedrungen ist. Nicht überall, aber an vielen Stellen in der Peripherie der Krebswucherung sind die Krebskörper nahezu völlig verhornt, wenn auch vielfach noch Kernfärbung vorhanden ist, und theils im Ganzen von Riesenzellen umgeben, theils auseinandergesprengt, indem Riesenzellen oder auch Granulationsgewebe, das ihnen anscheinend gefolgt ist, zwischen den einzelnen Zellen liegt, welche z. Th. auch in Riesenzellen eingeschlossen und vielleicht in ihnen im Untergang begriffen sind. Eine Beziehung dieser Riesenzellen zu den Ostoklasten, welche am Knochen reichlich vorhanden waren, ließ sich nicht feststellen.

Durchaus ähnliche Befunde ergab ein 2. Fall, bei dem das Cancroid sich gleichfalls an eine chronische Knochenerkrankung angeschlossen hatte: 57 jähriger Bergmann, der seit langen Jahren an Osteomyelitis mit Fistel der rechten Tibia litt und deshalb seit 11 Jahren pensionirt war; seit 1 Jahr Zeichen von Krebs, der nun die Amputation nöthig gemacht hatte. Lang eröffnete Sequesterlade, in der noch an der oberen Apophyse ein rundlicher Sequester liegt, in ganzer Ausdehnung krebsig; der Krebs hat an einer Stelle in den oberen Abschnitten der Tibia von innen her die Haut in der Nachbarschaft durchbrochen und ein kraterförmiges Geschwür gebildet.

Die gefundenen Riesenzellen sind nicht epithelialer, sondern bindegewebiger Abkunft und haben die Bedeutung von Fremd-

körperriesenzellen mit amöboiden und phagocytären Eigenschaften; der durch sie eingeleitete Prozeß kann zur Zerstörung, ja zur vollständigen Organisation der Perlkugeln durch junges Bindegewebe führen, stellt also eine Art partieller spontaner Heilung dar. Veranlaßt und begünstigt wird der Prozeß wahrscheinlich durch Eigenthümlichkeiten in der Genese des Krebses, so namentlich durch einen voraufgehenden langandauernden entzündlichen Prozeß, sowie durch das langsame Wachsthum des Krebses im Knochen wie durch begleitende endarteriitische Veränderungen.

Völlig anderer Art waren Riesenzellen in einem Cancroid der Unterlippe eines 52 jährigen Mannes, wo sie zwar zum großen Theil auch innerhalb der Krebskörper lagen, aber nicht als etwas Fremdes, von außen Eingedrungenes, sondern als umgebildete Krebszellen: hier handelte es sich um epitheliale Riesenzellen, um eine Wachsthumerscheinung des Krebses. Daneben meint allerdings Becher auch noch gewöhnliche Fremdkörper-Riesenzellen in der Peripherie der Krebskörper unterscheiden zu können.

Der 4. Hornkrebs hatte sich im Laufe von Jahren auf einem verjauchenden Lipom des Rückens entwickelt. Hier hatten die gefundenen Riesenzellen gar nichts mit den Krebskörpern zu thun, sondern lagen im Stroma um eigenthümlich hyalin aussehende Massen herum, die theilweise Aehnlichkeit mit osteoidem Gewebe hatten und hie und da wie mit einem Besatz von Osteoblasten versehen waren. Zweifellos handelt es sich um Fremdkörper-Riesenzellen in der Umgebung besonders beschaffener Stellen des Stroma.

B. schließt Betrachtungen über die Entstehung der Riesenzellen überhaupt, ihrer verschiedenen Typen im Besonderen sowie über ihre weiteren Schicksale an. (Virch. Arch. 96, 1899). —

7. Die wenigen bekannten Fälle von Ochronose können durch 2 weitere im Institut von dem Assistenten Herrn Dr. Heile untersuchte vermehrt werden, von denen der eine hier, der andere von Herrn Dr. Beneke in Braunschweig beobachtet wurde.

Im eigenen Falle handelte es sich um eine 36 jährige Frau, welche an Verblutung aus einer geplatzten schwangeren Tube gestorben war, dabei aber auch eine Mitralendocarditis mit Stenose hatte. Es fand sich eine fast gleichmäßig grauschwärzliche Färbung sämmtlicher Rippenknorpel, deren Durchschnitt im ganzen ebenholzartig aussah und nur an einzelnen offenbar verkalkten Stellen mehr gelbbraune Färbung zeigte. Die schwarze Färbung

skopische Befund an den Dünndarmzotten keinen Zweifel darüber, daß hier fetthaltiger Chylus in Resorption begriffen war.

Wenn das aber so ist, so kann ich auch die Meinung von Ebstein, daß man hier statt von Fettembolie von Fettthrombose sprechen müsse, nicht anerkennen, sondern muß die Berechtigung in Anspruch nehmen, da, wo eine wirkliche Verstopfung mit Fett, sei es auch nur mit feinkörnigem, stattgefunden hat - - und sie hat hier offenbar vielfach stattgefunden — von Fettembolie zu sprechen. Für die Befunde von größeren cylindrischen Fettmassen kann ohnehin über die Berechtigung der Bezeichnung Fettembolie m. E. kein Zweifel sein. —

Eine mikrochemische Eisenreaction war an diesem Pigment auf keine Weise zu erzielen, auch färbte sich wenigstens das körnige wie eisenfreies in Methylenblau deutlich grün, während allerdings der diffuse Farbstoff auch dabei seine Farbe unverändert behielt.

Eine vollständige Lösung des Farbstoffs wurde in 10 proc. Kalilauge, ferner in chlorsaurem Kali und concentrirter Salzsäure erzielt. Der auch beim Abkühlen in Lösung bleibende Farbstoff geht nicht in Aether, Amylalkohol, Benzol oder Chloroform über, dagegen ließ er sich sowohl durch Baryt wie durch essigsaures Blei fällen; bei Zusatz von Phosphorwolframsäure bezw. Schwefelwasserstoff findet sich das Pigment im Filtrat, welches spektroskopisch keinen besonderen Befund ergab. Dagegen ließen sich in dem gelösten Farbstoff Spuren von Eisen nachweisen.

Der 2. Fall betraf eine 52 jährige Frau, welche an chronischer Endocarditis mitralis und eitriger Bronchitis gelitten hatte. Die Befunde waren im wesentlichen die gleichen wie in dem ersten Falle, nur wurde an der Aorta und an Lymphdrüsen makroskopisch keine Färbung bemerkt.

Um eine gesteigerte Alterspigmentirung (Virchow) kann es sich bei dieser Ochronose nicht handeln, denn unser 1. Fall betraf eine 36 jährige Frau, aber auch die Erklärung Boströms, der die Ochronose als Folge der Resorption von Farbstoff aus Blutungen und des Angehaltenwerdens des circulirenden Pigments durch die pathologisch veränderten Gewebe ansieht, scheint Heile nicht zu genügen, da, wie in anderen Fällen, so auch im ersten eigenen solche langdauernden Blutungen nicht bestanden, er meint vielmehr, daß es sich um eine besondere Form der Hämochromatose handele, bei der sich das Pigment in besonders disponirten Theilen niederschlage. Dabei ist bemerkenswerth, daß die diffuse Färbung in den Knorpeln besonders die aufgefaserten Theile betrifft, welche schon bei jugendlichen Individuen vorkommen und bei van Gieson-Färbung allein eine braune Färbung annehmen, welche der ochronotischen ganz ähnlich ist. Bei allen bisher beobachteten Fällen waren Veränderungen im Circulationsapparat vorhanden: Aortenaneurysma, aneurysmatische Erweiterung des linken Ventrikels mit Thrombose, Verdickung an den Mitralschließungslinien in den fremden, chronische Mitralendocarditis in den beiden eigenen Fällen.

Schon lange war es uns im Institut aufgefallen, daß Präparate, welche während längerer Zeit einer Formolwirkung ausgesetzt waren, eine der ochronotischen ähnliche Färbung besonders an den Trachealknorpeln zeigen, die an Durchschnitten sich aller-

als die Werthe Donles. Eine solche Differenz aber konnte immerhin durch Fehler in meiner Schätzung erklärt werden. Ich habe daher nachträglich die Trägheitsmomente der bei den Beobachtungen benützten Radiometerkreuze gemessen; die damit berechneten Werthe der Drucke stimmen mit den von Donle gefundenen recht wohl überein, wie sich aus dem Folgenden ergiebt.

In der angeführten Arbeit habe ich für den Drehungswinkel φ des Flügelrädchens in seiner Abhängigkeit von der Zeit den folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$\varphi = \alpha t - \alpha\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Der Anfangspunkt der Zeit fällt zusammen mit dem Momente, in dem das Licht auf das Radiometer zu wirken beginnt; α ist der konstante Endwerth der Winkelgeschwindigkeit; die Bedeutung von τ ergiebt sich aus der Bemerkung, daß für große Werthe der Zeit t an Stelle der obigen Gleichung die einfachere gesetzt werden kann:

$$\varphi = \alpha(t - \tau).$$

Bezeichnen wir außerdem das Trägheitsmoment des Radiometers durch K, die Gesammtfläche der Flügel durch Q, den Abstand zwischen der Drehungsaxe und der Mitte der Flügel durch l, so ergiebt sich zur Berechnung des auf die Flügel ausgeübten Druckes die Gleichung:

$$p = \frac{\alpha K}{Q l \tau}.$$

Die Bestimmung der Trägheitsmomente K erfolgte nach der Gauß'schen Methode. Es wurde dabei als Träger der Radiometerkreuze ein bifilar aufgehängter Aluminiumcylinder benützt, dessen Trägheitsmoment K_0 aus den Dimensionen und aus dem Gewichte berechnet werden konnte. Es ergab sich $K_0 = 0{,}335$. Das Gewicht des Aluminiumcylinders betrug 1,847 g.

Radiometer I.

Für dieses Radiometer war $Q = 6{,}20$ q. cm., $l = 1{,}87$ cm. Die Masse des Kreuzes betrug 0,108 g. Um das Trägheitsmoment zu finden, wurde zuerst die Schwingungsdauer T_0 des Aluminiumcylinders zweimal gemessen. Bei aufgelegtem Flügelrädchen wurden die Schwingungen stark gedämpft und die Genauigkeit der Beobachtungen wurde dadurch erheblich vermindert. Bei aufgelegtem

faches oder Glycerinagar gebraucht, ein Unterschied zwischen beiden zeigte sich nicht. In den neutralisirten Mischungen, welche mit einer Aufschwemmung von Staphylokokken und Streptokokken in Bouillon beschickt und bei Zimmertemperatur gehalten wurden, trat bei 0,1 proc. Seifenzusatz überall Wachsthum auf, bei 1 proc. nur in dem mit weißer Seife gemischten Nährboden. Bei 0,5 proc. Zusatz waren die Erfolge unregelmäßig, nur bei den Sublimat- und Formolseifen zweifellos etwas ungünstiger für die Bakterien.

Bei den nicht neutralisirten Mischungen ergab sich folgendes: bei 0,5 proc. Seifenzusatz und Zimmertemperatur wuchs Bac. pyocyaneus überall, aber besser in der weißen und Benzoeseife, Staphylokokkus aureus überall ohne deutliche Unterschiede; im Brutschrank wuchs der B. pyocyaneus bei 0,5, 1 und 2 proc. Seifenzusatz überall, aber in deutlich mit dem höheren Zusatz abnehmender Reichlichkeit; der Staph. aureus wuchs bei 0,5 proc. Zusatz ebenfalls überall, bei 1 procentigem zeigten sich schon ungünstigere Verhältnisse bei den Sublimat- und Formolseifen und bei 2 proc. Seife trat in diesen gar kein Wachsthum mehr ein. Dabei war noch auffällig, daß beim B. pyocyaneus die Farbe stets sehr schön hervortrat, während beim Staph. aureus vielfach die Farbe fehlte, die dann aber wiederholt bei Weiterzucht wieder beobachtet wurde.

Die 2. Reihe der Versuche bezog sich auf die Reinigung von Holz oder Zeugstücken mit den verschiedenen Seifen nach Beschmutzung mit bakterienhaltigen Stoffen (Aufschwemmung von Reinkulturen von B. pyocyaneus, Staphyl. aureus und Streptokokkus pyogenes, Eiter mit verschiedenen Bakterien). Es wurde, nachdem die Bakterien angetrocknet waren, 1 Minute lang mit Seife in fließendem Wasser abgebürstet, dann in reinem fließenden Wasser ausgewaschen und nun abgeschabte oder abgeschnittene Stückchen des Holzes oder Zeugstücke in einer Gelatineplatte geprüft. Das Resultat war, daß ein Unterschied in der Seifenwirkung nicht hervortrat, daß der Pyocyaneus überall wuchs, die anderen Organismen aber in den verschiedenen Versuchen sich verschieden verhielten, in demselben Versuche aber gleichmäßig gegenüber den verschiedenen Seifen.

Es ist ja nun zwar nicht zu verkennen, daß es in diesen Versuchen unmöglich war, die Bedingungen überall für die zu prüfenden Stoffe gleichmäßig zu gestalten, aber das scheint doch, wie es kürzlich auf anderem Wege auch von anderer Seite festgestellt worden ist, aus den Versuchen hervorzugehen, daß man auf die desinficierenden Zusätze zu den Seifen nicht viel Werth

legen darf und daß auf die Art dieser Zusätze nicht viel ankommt. —

9. Im Februar 1898 hatte ich zufällig ein Lebercavernom gefunden, dessen Hohlräume von Balken von Leberzellen begrenzt waren, welche ebenso ohne scharfe Grenze in die benachbarten Leberzellenreihen übergingen, wie die Bluträume mit den Capillaren der Umgebung in Verbindung standen. Nur dadurch waren im allgemeinen die Zellen des Cavernoms von denjenigen der übrigen Leber unterschieden, daß sie viel größer waren, wie denn überhaupt das ganze Gebilde als ein hypertrophischer Leberknoten mit größtentheils cavernöser Umwandlung der Bluträume anzusehen war. Der Befund schien für die Frage nach der Entstehung der Lebercavernome von Wichtigkeit zu sein, besonders da er mit der bald darauf von Ribbert über diese Frage geäußerten Ansicht nicht in Einklang zu bringen war. Ich habe daher den Volontärassistenten Herrn Dr. Schmieden veranlaßt, von diesem Falle ausgehend sich das Studium der Lebercavernome in Rücksicht auf ihre Entstehung angelegen sein zu lassen. Schmieden hat während längerer Zeit alle zur Verfügung stehenden Lebern nach Cavernomen durchforscht und bis jetzt in 28 Fällen solche gefunden, 18 mal nur eines, 10 mal mehrere in derselben Leber. Dazu kamen 9 Lebern, die z. Th. den Cavernomen verwandte Bildungen enthielten bezw. makroskopisch den Verdacht beginnender Cavernombildung darboten. Alle Lebern wurden sorgfältig, größtentheils an Reihenschnitten mikroskopisch untersucht.

In 7 Fällen waren die cavernösen Bluträume durch Septa begrenzt, welche aus Leberzellen gebildet wurden, die übrigen 21 Fälle hatten fibröse bezw. fibromuskulöse Scheidewände; 3 von den Cavernomen der letzten Sorte waren durch eine dicke fibröse Kapsel scharf abgegrenzt, welche Gallenkanälchen enthielt. Der größere Theil aller beobachteten Cavernome lag direkt unter der Kapsel der Leber, die übrigen in der Tiefe, häufig nahe der sagittalen Mittellinie des Organs, jedoch auch an anderen Stellen. Das Alter der Träger lag größtentheils zwischen 27 und 80 Jahren, einmal handelte es sich um ein 10 wöchentliches, einmal um ein neugeborenes Kind, das nicht weitergelebt hatte, womit der bisher noch ausstehende Nachweis geliefert war, daß Cavernome auch angeboren vorkommen. Bei den Erwachsenen boten die Lebern sonst die verschiedensten Veränderungen, u. a. auch cirrhotische dar, es fanden sich aber nur wenige mit ausgesprochener

Stauung, während bei vielen keine Spur bestehender oder überstandener Stauung zu bemerken war.

Die 2 Cavernome aus Lebern kleiner Kinder gehören zu den 7, in denen die Scheidewände von Leberzellen gebildet wurden und die noch ausgedehnte capilläre Anastomosen mit dem Nachbargewebe zeigten, an denen das einfache Endothel der cavernösen Räume unmittelbar in das ihm völlig gleichartige der Lebercapillaren übergeht. Abgesehen von diesem Verhältniß kennzeichnen sich alle diese Fälle als solche, in denen die Cavernomentwicklung noch unvollendet ist, dadurch, daß sich die cavernöse Veränderung auf die Capillaren des veränderten Bezirks beschränkt, während die Lebervenen, Arterien und Pfortaderäste unverändert sind, und daß Bindegewebswucherung völlig fehlt, sowohl im Innern des Bezirks wie am Rande, wo eine schärfere Abgrenzung gegen die Umgebung fast noch nirgends vorhanden ist. Nur in einigen Fällen machten sich Druckerscheinungen (concentrische Abplattung der nächsten Leberläppchen) in der Umgebung geltend, als Beweis einer noch bis zuletzt fortdauernden Vergrößerung des cavernösen Bezirks. Dies zeigte sich besonders bei solchen jungen Cavernomen, welche — und das war die Mehrzahl (5 von 7) — mit knotiger Hypertrophie des Lebergewebes verbunden waren. Die Häufigkeit dieser Combination beweist, daß die beiden Veränderungen, cavernöse Umwandlung der Bluträume und Hypertrophie der Leberzellen in einer näheren Beziehung zu einander stehen müssen. Beide hält Schmieden für Entwicklungsstörungen und da er wiederholt daneben auch noch andere Veränderungen fand, welche er als angeboren ansehen zu können glaubt und welche zum Theil in direkter Verbindung mit den cavernösen Bildungen standen, so hat er die Vorstellung gewonnen, es handle sich hier um Gebilde, welche den Naevi der äußeren Haut an die Seite gestellt werden könnten, welche wie diese nur eine gewisse Zeit wachsen, dann das weitere Leben hindurch unverändert und als im ganzen gleichgültige Gebilde weiter bestehen. Jedenfalls ergiebt aber ein Vergleich sämmtlicher Fälle, daß weder Stauung die erste Ursache der Cavernombildung sein kann, noch eine primäre Bindegewebswucherung, noch Leberzellenatrophie, Gallenstauung oder Hämorrhagien, noch endlich die von Ribbert angenommene embryonale Absprengung eines kleinen Gefäßästchens, das nicht in normale Beziehung zu den Leberzellen getreten ist, sondern sich für sich zu dem Angiom weiter entwickelt hat. —

10. Bei einem 25 jähr. Manne, welcher unter den Erscheinungen der Insufficientia myocardii gestorben war und bei dem die Sektion eine chronische tuberkulöse Pericarditis mit totaler Obliteration des Herzbeutels, frische tuberkulöse Pleuritis, Lymphdrüsentuberkulose, alte tuberkulöse Lungenherde, Herzthromben, Stauungserscheinungen ergab, fand sich eine eigenthümliche Veränderung in den graden Bauchmuskeln, besonders in ihrem obersten Stück, welche Herr Dr. Schmieden einer genauen Untersuchung unterzogen hat. Die Muskeln hatten ein fischfleischähnliches Aussehen, waren aber nicht gleichmäßig verändert, sondern zeigten Uebergänge zwischen den am stärksten veränderten Stellen und normal aussehenden Abschnitten. Die erwartete allgemeine schwere wachsige Degeneration wurde mikroskopisch nicht gefunden, sondern eine interessante Vereinigung nahezu aller gewöhnlichen Formen degenerativer Muskelveränderungen mit reparatorischen und regeneratorischen Erscheinungen.

Von den ersten fanden sich trübe Schwellung verbunden mit Schlängelung und Abnahme der Querstreifung, feinkörnige Verfettung, wachsige Degeneration, ziemlich gleichmäßig verbreitet und in allen Stadien der Ausbildung, aber meist doch nur in den Anfangsstadien, Atrophie von Fasern mit atrophischer Kernwucherung, fleckweise vacuoläre Degeneration, die nirgends mit wachsiger Veränderung in derselben Faser zugleich gefunden wurde. Außerdem bestand noch eine zellige Infiltration des Zwischengewebes.

Auf reparatorische und regeneratorische Vorgänge deutete der Befund von Längstheilung, wobei die Theilstücke gleich oder ungleich dick waren, sich weithin verfolgen ließen und bald den Umfang der normalen Fasern erreichten bald nicht. Niemals wurden irgendwelche Besonderheiten, welche auf die Entstehung der Theilungen ein Licht werfen könnten, an den Theilungsstellen oder Theilästen gefunden, so daß es sich hier um einen fertigen Zustand gehandelt haben muß, dessen Entstehung zeitlich früher zu setzen ist, als die der übrigen Befunde. Diese bestanden in der Anwesenheit von Riesenzellen in einem Theil der hyalin degenerirten Muskelfasern, ohne Mitosen, nur sehr spärlich Zeichen von Umwandlung in junge Muskelfasern darbietend, aber mit den bekannten Bildern der Phagocytose: sie umlagerten die wachsigen Trümmer, hatten manchmal nur noch kleine Reste solcher umschlossen, waren in Lücken derselben eingedrungen oder in Buchten derselben eingelagert. Die Bilder von halbmondförmiger Umlagerung querstreifiger Substanz um hyaline Massen faßt Schm.

als durch partielle wachsige Entartung nicht als durch regeneratorische Neubildung quergestreifter Substanz entstanden auf und stützt sich dabei u. a. auch darauf, daß diese Muskelsubstanz nach Ueberfärbung mit Hämatoxylin und Differenzierung mit Salzsäure-Alkohol sich ebenso färbte wie die übrigen Muskeln, während die sicher neugebildeten muskulösen Elemente ebenso wie die Riesenzellen eine viel dunklere Färbung annahmen.

Riesenzellen ganz von derselben Art der im Sarcolemm liegenden zeigten sich auch im interstitiellen Gewebe, wo sie nach Schm. Reste zu Grunde gegangener wachsiger Muskelfasern darstellen.

Die Erklärung für diese wechselvollen Befunde sucht Schmieden darin, daß es sich hier um eine chronische Erkrankung handelte, in deren Verlauf wohl sicher Verschlimmerungen und Besserungen mit einander abwechselten, so daß dementsprechend degenerative und reparatorische Vorgänge auch an den Muskeln mit einander abwechseln konnten. Die letzten waren allerdings, da nur Besserung, nie Heilung eintrat, gering und in der letzten Lebenszeit überwogen die Schädigungen, welche in den frischen degenerativen Veränderungen ihren Ausdruck gefunden haben. —

11. Einen der seltenen Fälle von hochgradiger Lipaemie bei Diabetes hat Herr Degenhardt zum Gegenstande seiner Dissertationsarbeit gemacht. Das 27 jährige Dienstmädchen, dessen Schwester ebenfalls an diabetischem Coma zu Grunde gegangen war, litt schon längere Zeit an Diabetes, war auch schon früher in der hiesigen medicinischen Klinik deswegen in Behandlung und kam in comatösem Zustande wieder dahin, wo sie dann nach 8 Stunden verstarb.

Bei der Sektion nahm das Hauptinteresse die Veränderung des Blutes in Anspruch. Dasselbe sah an vielen Orten wie mit Milch gemischt aus, enthielt im Herzen geronnene breiige Massen, welche theilweise erweichter Gehirnmasse glichen; in einzelnen Arterien fanden sich zahlreiche, mehrere Millimeter bis 2 cm lange weißliche, wurstartige parasitenähnliche Gebilde aus Fett. Am stehenden Blute setzte sich noch eine dicke Rahmschicht (von 200 ccm Blut etwa 20 ccm) an der Oberfläche ab. An vielen Organen sind kleine Gefäßchen als weißliche Streifchen sichtbar, auch das Parenchym der Milz hat ein milchigtrübes Aussehen. Außer im Blut fand sich auch Fett in der Lymphe, so an subpleuralen und peripankreatischen Lymphgefäßen, und endlich zeigten sowohl mehrere Stellen an der Lunge, wie vor allem das Binde-

gewebe um die Trachea und im hinteren Abschnitt des Mediastinum eine diffuse Infiltration mit chylöser Masse. Der Ductus thoracicus enthielt zwar nur wenig Chylus und an den mesenterialen Chylusgefäßen war nichts besonderes zu sehen, aber im Anfangstheil des Dünndarms zeigten alle Zotten eine feine weiße Injektion. Im Magen befand sich keine Flüssigkeit, aber Reste von Hülsenfrüchten (Linsen), im Duodenum ein dunkelgefärbter schleimiger Inhalt, im Dünndarm wird der Inhalt von ziemlich festen Bestandtheilen gebildet und im Anfangstheil des Dickdarms zeigten sich grünliche Inhaltsmassen mit Linsenresten. Sonst ist noch bemerkenswerth, daß ein Theil des linken Bronchialbaumes einen mit kleinen Brocken gemischten schmierigen Inhalt bis in die kleinen Bronchien hinein besaß, sowie daß ein recht guter allgemeiner Ernährungszustand bestand, der sich besonders durch ein sehr reichliches Fettpolster äußerte.

Mikroskopisch zeigte sich sowohl an frischen Präparaten wie nach Härtung in Flemming'scher Flüssigkeit überall Fett im Blute, oft so dicht, daß selbst größere Gefäße, vor allem aber Capillaren prall mit Fettmasse ausgefüllt schienen. Wenn auch meistens einzelne Tröpfchen unterscheidbar waren, so fanden sich doch auch, z. B. in einzelnen Nierenknäueln und besonders im Gehirn zusammenhängende wurstförmige Ausfüllungsmassen, welche ganz das Bild wie bei der gewöhnlichen Fettembolie gaben. Die farblosen Blutkörperchen ließen keinerlei Beziehungen zu den Fettanhäufungen erkennen, auch ist an den Flemmingpräparaten ein Fettgehalt an ihnen kaum mehr festzustellen, während allerdings frisch eine ganz feine Bestäubung mit Fettkörnchen sicher nachgewiesen wurde.

Dagegen fand sich an vielen Organen auch an den gehärteten Präparaten Verfettung der Zellen. Nicht an den Endothelzellen, wohl aber an den Muskelzellen von Gefäßen, dann in Nieren-, Pankreas- und Leberzellen (nicht in den Kupfer'schen Sternzellen), wenig in Herz- und Thoraxmuskeln. Im Dünndarm zeigte sich wie überall Fett in den Blutgefäßen, daneben aber auch eine sehr reichliche Anhäufung, zum Theil dicker Fetttröpfchen in den Chylusgefäßen, insbesondere der Zotten. Von sonstigen Befunden sind zu nennen Epithelnecrosen in Nieren und Pankreas sowie fleckweise zellige Infiltration des interstitiellen Gewebes von Nieren, Leber, Herz.

Auf die Beziehungen der Lipaemie zu den klinischen Erscheinungen soll hier nicht eingegangen, sondern nur die Frage erörtert werden, woher das Fett im Blute stammt. Es liegen ver-

schiedene Möglichkeiten vor, die alle ihre Vertreter gefunden haben: das Fett könnte in den Gefäßen aus dem Blute, etwa noch unter Betheiligung von verfettenden Endothelzellen entstanden sein, so daß man dann von einer Art von Fettthrombose reden könnte, wenn es irgendwo zu einer Verstopfung von Gefäßen durch Fett gekommen wäre; oder dasselbe könnte aus dem Körper stammen und in die Gefäße eingeschwemmt sein, wobei wiederum die Herkunft aus den normalen Ablagerungsstätten des Fettes (Fettgewebe und Leber) und den pathologisch verfetteten Gewebstheilen auseinander zu halten wäre; oder endlich das Fett könnte aus der Nahrung stammen, so daß es sich um eine Chylaemie handelte. Selbstverständlich können auch mehrere Quellen für das Fett gleichzeitig vorhanden sein.

Daß im vorliegenden Falle das Fett aus den normalen Ablagerungsorten stamme, dafür spricht nichts, denn der Panniculus war reichlich vorhanden, kein Zeichen für Fetttransport in der Leber (freie Sternzellen). Aber auch die pathologischen Verfettungen überschritten durchaus nicht das gewöhnliche Maß; sie waren gering in Herz- und Skelettmuskeln, auch die Nieren waren keine eigentlichen Fettnieren, nur die Pankreaszellen enthielten reichlich Fett, aber nichts deutete darauf hin, daß ein größerer Zerfall stattgefunden habe, so daß m. E. gegenüber der ungeheuren Menge des im Blut vorhandenen Fettes diese Quelle völlig ungenügend erscheinen muß. Erst recht gilt dieses für die Gefäße mit ihrem Inhalt selbst, denn es wurden keine verfetteten Endothelzellen gefunden und die Veränderung der Leukocyten war so minimal, daß sie an den gehärteten Präparaten gar nicht wiedergefunden werden konnte. Somit kann ich der von Herrn Coll. Ebstein über denselben Fall geäußerten Ansicht (Virch. Arch. 155 S. 585), daß hier die Lipaemie ihre wesentliche Erklärung in dem bei der fettigen Entartung der Organe und besonders der Elemente des Blutes selbst entstehenden Fettzuwachs finde, nicht zustimmen, sondern muß annehmen, daß das Fett im Blute zum größten Theil aus der Nahrung stammt. Die Kranke hat noch kurz vor dem Eintritt des Coma gegessen, denn es fanden sich Inhaltsmassen sowohl im Dünn- wie im Dickdarm (hier mit Linsenresten), sowie Linsen im Magen. Daß dieser nicht mehr Flüssigkeit enthielt, dürfte vielleicht seine einfache Erklärung darin finden, daß die Patientin erbrochen hat, worauf der Befund von schmierigem mit Bröckeln gemischtem Inhalt im linken Bronchialbaum hindeutet. Ganz besonders aber läßt der makro- wie mikro-

skopische Befund an den Dünndarmzotten keinen Zweifel darüber, daß hier fetthaltiger Chylus in Resorption begriffen war.

Wenn das aber so ist, so kann ich auch die Meinung von Ebstein, daß man hier statt von Fettembolie von Fettthrombose sprechen müsse, nicht anerkennen, sondern muß die Berechtigung in Anspruch nehmen, da, wo eine wirkliche Verstopfung mit Fett, sei es auch nur mit feinkörnigem, stattgefunden hat — und sie hat hier offenbar vielfach stattgefunden — von Fettembolie zu sprechen. Für die Befunde von größeren cylindrischen Fettmassen kann ohnehin über die Berechtigung der Bezeichnung Fettembolie m. E. kein Zweifel sein. —

Ueber den in Radiometern auftretenden Druck.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 22. Juli 1899.

In einer Arbeit, welche ich am 15. August 1877 der K. G. d. Wissenschaften vorgelegt hatte [1]), habe ich eine Methode beschrieben, mit deren Hülfe der in Radiometern auf die Flügel des Rädchens ausgeübte Druck in verhältnißmäßig sehr einfacher Weise bestimmt werden kann. Ich habe in der Arbeit hervorgehoben, daß die von mir angegebenen Zahlenwerthe nur die Größenordnung jenes Druckes wiedergeben; zu einer wirklichen Berechnung des Druckes ist die Kenntniß des Trägheitsmomentes nöthig, welches das Flügelrädchen besitzt; dieses aber hatte ich nur geschätzt und nicht gemessen. Ich bin an diese weit zurückliegenden Beobachtungen durch eine neue Arbeit von Donle [2]) erinnert worden. Donle hat mit Hülfe von Bifilarwagen Druckmessungen ausgeführt, welche unter sich eine recht gute Uebereinstimmung zeigen. Aus dem Vergleiche seiner Zahlen mit den von mir früher angegebenen zieht er den Schluß, daß meine Werthe 40—60 mal größer seien als die seinigen. Aus einem Fehler der Schätzung konnte ich mir eine so große Differenz nicht erklären; ich mußte also fürchten, daß meiner Methode ein principieller Fehler anhafte. Nun hatte ich dieselbe Methode benützt, um den Reaktionsdruck der Kathodenstrahlen zu bestimmen; es lag mir also daran, den Grund der Differenz aufzuklären. Zunächst ergab sich nun, daß bei der Reduktion der von mir seinerzeit benutzten Maaße auf cm. g. sec. ein Versehen gemacht worden war. Die von mir gefundenen Werthe sind thatsächlich nur 4—6 mal größer

1) Einige Beobachtungen an dem Radiometer von Crookes. Göttinger Nachr. 1877. p. 500.

2) Versuch zur Ermittelung der Größenordnung der in Radiometern auftretender Drucke. Wied. Ann. 1899. Bd. 68. S. 306.

als die Werthe Donles. Eine solche Differenz aber konnte immerhin durch Fehler in meiner Schätzung erklärt werden. Ich habe daher nachträglich die Trägheitsmomente der bei den Beobachtungen benützten Radiometerkreuze gemessen; die damit berechneten Werthe der Drucke stimmen mit den von Donle gefundenen recht wohl überein, wie sich aus dem Folgenden ergiebt.

In der angeführten Arbeit habe ich für den Drehungswinkel φ des Flügelrädchens in seiner Abhängigkeit von der Zeit den folgenden Ausdruck abgeleitet:

$$\varphi = \alpha t - \alpha\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Der Anfangspunkt der Zeit fällt zusammen mit dem Momente, in dem das Licht auf das Radiometer zu wirken beginnt; α ist der konstante Endwerth der Winkelgeschwindigkeit; die Bedeutung von τ ergiebt sich aus der Bemerkung, daß für große Werthe der Zeit t an Stelle der obigen Gleichung die einfachere gesetzt werden kann:

$$\varphi = \alpha(t - \tau).$$

Bezeichnen wir außerdem das Trägheitsmoment des Radiometers durch K, die Gesammtfläche der Flügel durch Q, den Abstand zwischen der Drehungsaxe und der Mitte der Flügel durch l, so ergiebt sich zur Berechnung des auf die Flügel ausgeübten Druckes die Gleichung:

$$p = \frac{\alpha K}{Q l \tau}.$$

Die Bestimmung der Trägheitsmomente K erfolgte nach der Gauß'schen Methode. Es wurde dabei als Träger der Radiometerkreuze ein bifilar aufgehängter Aluminiumcylinder benützt, dessen Trägheitsmoment K_0 aus den Dimensionen und aus dem Gewichte berechnet werden konnte. Es ergab sich $K_0 = 0{,}335$. Das Gewicht des Aluminiumcylinders betrug 1,847 g.

Radiometer I.

Für dieses Radiometer war $Q = 6{,}20$ q. cm., $l = 1{,}87$ cm. Die Masse des Kreuzes betrug 0,108 g. Um das Trägheitsmoment zu finden, wurde zuerst die Schwingungsdauer T_0 des Aluminiumcylinders zweimal gemessen. Bei aufgelegtem Flügelrädchen wurden die Schwingungen stark gedämpft und die Genauigkeit der Beobachtungen wurde dadurch erheblich vermindert. Bei aufgelegtem

Rädchen wurden daher 10 Messungen der Schwingungsdauer T ausgeführt. Zum Schluß wurde noch zweimal die Schwingungsdauer des Aluminiumcylinders allein beobachtet. Die Resultate der Beobachtungen sind im Folgenden zusammengestellt.

Schwingungsdauer des Aluminiumcylinders:

2,644 2,664 2,667 2,674.

Im Mittel:

$$T_0 = 2{,}662.$$

Bei aufgelegtem Kreuze ergaben sich die Schwingungsdauern:

3,533	3,500	3,500	3,442	3,500
3,448	3,448	3,500	3,500	3,517.

Im Mittel:

$$T_0 = 3{,}489.$$

Für das Trägheitsmoment des Radiometerkreuzes ergiebt sich hieraus, unter der Voraussetzung, daß die Torsion der Kokonfäden gegen das Moment der bifilaren Aufhängung vernachlässigt werden kann:

$$K = 0{,}274.$$

Mit Hülfe dieses Werthes ergiebt sich aus den in der früheren Arbeit mitgetheilten Beobachtungsreihen die folgende Zusammenstellung:

Abstand der Flamme von dem Radiometer.	α	τ	p
80 cm	0,203	11,2	0,000432
70 cm	0,303	11,8	0,000606

Als Lichtquelle diente eine voll brennende Argandlampe. Bezeichnen wir den Abstand der Lichtquelle von dem Radiometer mit e, so ergiebt sich aus der ersten Beobachtungsreihe:

$$pe^2 = 2{,}76,$$

aus der zweiten

$$pe^2 = 2{,}97.$$

Im Mittel wird

$$pe^2 = 2{,}86.$$

In einer Entfernung von 50 cm wird daher der Druck der Lichtstrahlen auf die Radiometerflächen gleich

$$0{,}00114 \quad g \cdot \mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{sec}^{-2}.$$

Dieses Resultat stimmt mit den von Donle gegebenen Werthen von 0,0007—0,0008 Dynen pro qcm so weit überein, als es bei der Verschiedenheit der Versuche erwartet werden kann.

Radiometer II.

Bei diesem Radiometer war $Q = 6{,}76$ qcm, $l = 1{,}67$ cm. Die Masse des Kreuzes betrug 0,106 g. Für die zur Berechnung des Trägheitsmomentes nöthigen Schwingungsdauern wurde mit Benützung einer anderen Suspension gefunden:

$$T_0 = 2{,}737 \text{ und } T_0 = 3{,}352.$$

Daraus ergab sich für das Trägheitsmoment der Werth $K = 0{,}196$. Die Normalen der Flügelflächen waren gegen die Horizontale geneigt; für die Neigungswinkel ergaben sich die Werthe: 40°, 23°, 21° und 36°. Bezeichnet man diese Winkel mit φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, so ergiebt sich zur Berechnung des auf die Flügel ausgeübten Druckes die Formel:

$$p = \frac{\alpha K}{Q l \tau} \cdot \frac{4}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 + \cos\varphi_4}.$$

Auf Grund der früher mitgetheilten Beobachtungen ergiebt sich nun die folgende Zusammenstellung:

Abstand der Flamme von dem Radiometer.	α	τ	p
40 cm	0,455	28,6	0,000322
40 cm	0,494	28,9	0,000346
40 cm	0,523	25,0	0,000424
37 cm	0,720	23,3	0,000626
37 cm	0,690	17,9	0,000780
37 cm	0,770	18,7	0,000834.

Zu einem Vergleiche mit anderen Messungen sind die mit dem zweiten Radiometer angestellten Beobachtungen wenig geeignet. Bei den verhältnißmäßig kleinen Abständen zwischen Lampe und Radiometer mußte die Lampe kurz geschraubt werden, um die Rotationsgeschwindigkeit in schicklichen Grenzen zu halten. Daher wechselte die Intensität der Lichtquelle von Versuch zu Versuch in einer nicht weiter zu bestimmenden Weise. Aber auch das Radiometer selbst genügte nicht den bei der Ableitung der Formel gemachten Voraussetzungen, sofern die Reibung des Rädchens

auf der Spitze mit der Rotationsgeschwindigkeit zunahm. Nimmt man an, daß die radiometrische Wirkung dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional sei, so ergeben sich für einen Abstand von 50 cm die folgenden Drucke auf die Flügel des zweiten Radiometers:

0,000206;	0,000222;	0,000275;
0,000343;	0,000427;	0,000456.

Sie liegen zwischen den Drucken, welche Donle für eine Stearinkerze und für einen Auerbrenner bei 50 cm Abstand gefunden hat.

Das Wirkungsgesetz des Wehnelt-Unterbrechers.

Von

Hermann Th. Simon.

Vorgelegt von Eduard Riecke in der Sitzung am 6. Mai 1899.

1. Wird ein elektrischer Gleichstrom von nicht zu kleiner Spannung (z. B. derjenigen einer Lichtcentrale) durch eine (etwa mit verdünnter Schwefelsäure gefüllte) elektrolytische Zelle geschickt, deren Anode eine kleine Platinspitze, deren Kathode eine größere Metallplatte (Blei) bildet, so geht, wie schon Richarz[1]), sowie Koch und Wüllner[2]) gezeigt haben, kein continuierlicher Strom durch den Stromkreis, sondern es treten an der anodischen Spitze Vorgänge auf, welche dem Strome einen intermittierenden Charakter verleihen. Auf diese Erscheinung gestützt, hat Herr Wehnelt[3]) seinen für den Betrieb von Induktorien und Wechselstromapparaten bestimmten „elektrolytischen Unterbrecher" erdacht, dessen merkwürdige und außerordentliche Wirkungen das wissenschaftliche Interesse gegenwärtig so lebhaft in Anspruch nehmen.

2. Von den Eigenschaften dieses Apparates, wie sie von Wehnelt[3]), Spieß und Wehnelt[4]) und anderen Forschern beobachtet worden sind, seien Folgende hervorgehoben: Die Anordnung wirkt als Unterbrecher dauernd und sicher nur dann, wenn die kleinere (Platin)Elektrode Anode ist. Die Zahl der Unterbrechungen nimmt mit wachsender Selbstinduktion des Schließungskreises ab, mit wachsender Betriebsspannung zu, mit wachsender Größe der Anode ab. Die Stromstärke (gemessen an einem Hitzdrahtamper-

1) F. Richarz, Wied. Ann. 39, p. 231, 1890; ibid. 47, p. 561, 1892.

2) R. Koch und A. Wüllner, Wied. Ann. 45, p. 473 und 759 ff. 1892.

3) A. Wehnelt, Elektrot. Zeitschr., Heft 4, 1899.

4) P. Spieß und A. Wehnelt, Verh. der deutsch. Physik. Gesellsch. I, p. 53, 1899.

meter) nimmt mit wachsender Selbstinduktion des Schließungskreises ab, mit wachsender Bestriebsspannung zu, mit wachsender Größe der Anode zu.

Ferner haben Spiess und Wehnelt[1]) aus ihren Versuchen geschlossen, daß die Stromkurve, nach der sich die Unterbrechungen vollziehen, horizontale Stücke auf der Nulllinie aufweisen müsse, d. h. daß der Strom während jeder Periode einige Zeit ganz unterbrochen bleibt. D'Arsonval[2]) fand, daß der Unterbrecher auch dann funktioniert, wenn man ihn an eine Wechselstromleitung (110 Volt) anschließt, und daß auch dann die Entladungen im sekundären Kreise eines mit dem Unterbrecher betriebenen Induktoriums nur in einem Sinne erfolgen. Schließlich teilen mehrere Beobachter mit, daß die Erscheinung von Druck und Temperatur der Füllungsflüssigkeit des Unterbrechers beeinflußt wird. So hat d'Arsonval[3]) beobachtet, daß bei einer Temperatur die sich 100° nähert, der Unterbrecher versagt. Armagnat[3]) findet, daß man den Unterbrecher mit desto kleinerer Betriebsspannung erregen könne, je heißer die Füllungsflüssigkeit ist.

3. Ueber den physikalischen Vorgang, der diese complicierten Eigenschaften des Unterbrechers bestimmt, haben Spiess und Wehnelt[4]) — durch den erwähnten Einfluß der Selbstinduktion bestimmt — die Ansicht ausgesprochen, es entstehe bei dem Vorgange eine Art von elektrolytischer Capacität C an der Anode, welche mit der Selbstinduktion L des Schließungskreises ein elektrisch schwingendes System von der Schwingungszahl $T = \pi \sqrt{LC}$ bilde. Da dieser Erklärungsversuch nach vielen Richtungen hin unbefriedigt läßt, so habe ich von einer anderen Seite her Aufschluß zu erlangen gesucht und bin auf Grund zahlreicher Messungen zu der Auffassung gelangt, die im Folgenden mitgeteilt und an der Hand des Beobachtungsmaterials discutiert werden soll. Wie ich nachträglich fand, wird meine Auffassung in erfreulicher Weise durch die Versuche und Ansichten gestützt, die Herr Richarz über die Natur der an kleinen Elektroden auftretenden Uebergangswiederstände veröffentlicht hat[5]).

4. Die Methode meiner Versuche stützte sich auf die Be-

---

1) P. Spiess und Wehnelt, Verh. der deutsch. Physik. Gesellsch. I, p. 53, 1899.

2) d'Arsonval, C. R. 128, p. 529, 1899.

3) H. Armagnat, C. R. 128, p. 988, 1899.

4) l. c.

5) F. Richarz, Wied. Ann. 39, p. 67—88 und p. 201—285, 1890; ibid. 47, p. 567—582, 1892; ibid. 63, p. 261—267, 1897.

obachtung der Unterbrechungszeiten des Wehnelt-Unterbrechers unter den verschiedensten Versuchsbedingungen. Zu dem Zwecke wurden photographisch mittelst eines Fallpendels die Funken eines mit dem Wehnelt-Unterbrecher gespeisten Induktoriums registriert und nach Ermittlung der Pendelgeschwindigkeit gezählt. Die Pendelgeschwindigkeit ergab sich bei jeder Versuchsreihe aus einem Versuche, bei dem der Funken von einer Spitze aus übersprang, die auf einer elektromagnetisch bewegten Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl befestigt war.

Die Versuche wurden so angestellt, daß jedesmal eine der Grössen

J Stromstärke (am Hitzdrahtampermeter gemessen), p Anodenlänge, d Anodendurchmesser, f Funkenlänge, t Temperatur der Füllflüssigkeit, E Betriebsspannung

variiert wurde, während die übrigen möglichst constant gehalten, bezw. als Funktion der jeweiligen Variablen gemessen wurden. Die Fehlergrenze der Methode erwies sich kleiner als 5 %.

5. Qualitativ wurde durch solche Versuche zunächst ermittelt,

a) daß der Wehnelt-Unterbrecher nur Oeffnungsfunken liefert und nicht Oeffnungs- und Schliessungsfunken, wie es die Spieß-Wehneltsche Auffassung hätte erwarten lassen;

b) daß der Unterbrecher beim Betriebe mit Wechselstrom nur in demjenigen Aste der Stromkurve unterbricht, wo die Platinspitze Anode ist;

c) daß eine Aenderung der Säuredichte des Unterbrechers innerhalb enger Grenzen, wie sie durch den Unterbrecherbetrieb selbst hervorgerufen wird, keinen bemerkbaren Einfluß auf die Unterbrecherzahl hat;

d) daß die Temperatur der Säure dagegen eine größere Bedeutung besitzt, in dem Sinne, daß bei höherer Temperatur die Unterbrechungszahl ziemlich schnell abnimmt, bis bei 60° schon Unsicherheit in der Wirkung eintritt.

6. Quantitativ ergab sich als grundlegend für die Erklärung der Erscheinung, daß bei ein und demselben Unterbrecher immer dieselbe Unterbrechungsperiode T erhalten wurde, wenn man die Stromstärke constant erhielt. Da es sich um die am Hitzdrahtinstrument gemessene Stromstärke

$$J = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}$$

handelt, so heißt das, es war jedesmal die zu einer Unterbrechung nötige Stromarbeit constant.

Die Tabellen I und II geben über dieses Verhalten Rechenschaft.

In denselben ist T die Unterbrechungsperiode, w ein Vorschaltwiderstand zur Regulirung von J.

Tabelle I:

$E = 70$ Volt, $p = 5{,}5$ mm, $d = 0{,}5$ mm, $J = 9$ Amp.

Platten-No.	f	w	$T.10^6$	Δ	Δ %
46	10	2,9	305	+17	5,5
47	12	2,4	300	+12	4
48	14	1,9	286	−2	0,68
49	16	1,5	286	−2	0,68
50	18	0,88	286	−2	0,68
51	20	0,03	270	−18	6,3
52	21	0	286	−2	0,68
			Mittel 288		

Tabelle II:

$E = 140$ Volt, $p = 5{,}5$ mm, $d = 0{,}5$ mm, $J = 11{,}95$ Amp.

Platten-No.	f	w	$T.10^6$	Δ	Δ %
53	10	4,5	179	+8	4,5
54	12	3,4	163	−8	4,5
55	14	2,1	140	−31	22
56	16	1,0	140	−31	22
57	18	2,7	163	−8	4,5
58	20	2,4	179	+8	4,5
59	21	1,8	163	−8	4,5
60	16	3,05	169	−2	1,8
			Mittel 171		

Nach Versuch 56 wurde die durch den andauernden Betrieb heißgewordene Säure erneuert. Die Rubrik w zeigt entsprechend einen Einfluß der Temperatur in dem Sinne, daß eine größere Betriebsspannung dazu gehört, um mit wärmerer Säure die gleiche Unterbrechungsperiode zu erzielen als mit kalter. Mit zunehmender Temperatur nimmt also die Unterbrechungszahl ab.

7. Die unter 5 und 6 gefundenen Thatsachen drängen zu der Auffassung, daß es sich bei dem Wehnelt-Unterbrecher nicht um eine elektrolytische, sondern um eine Wärmewirkung handelt. Ich denke mir den Vorgang so:

Wenn man den Unterbrecherstromkreis schließt, so wächst der Strom wegen der vorhandenen Selbstinduktion relativ langsam

zu seinem Endwerte zu. Bei der Anordnung des Unterbrechers findet der Strom einen wesentlichen Widerstand nur auf der Oberfläche der Platinspitze, da ihm überall sonst eine Bahn von relativ großem Querschnitt zur Verfügung steht, der an der Platinanode plötzlich auf die Größe der Spitzenoberfläche beschränkt wird. Somit wird auch die Entwicklung der Joule'schen Wärme durch den Strom wesentlich auf die Anodenoberfläche lokalisiert, die Temperatur wird mit der Dauer des Stromes dort sehr rasch wachsen, bis schließlich eine Verdampfung über der ganzen Oberfläche einsetzt und den Stromdurchgang plötzlich unterbricht[1]). Dann tritt eine allmähliche Abkühlung ein, der Strom wird also wieder geschlossen und der Vorgang beginnt von Neuem.

3. Um diese Vorstellung quantitativ zu präcisiren, teilen wir die Unterbrechungsperiode T in zwei Phasen, die eine vom Momente des Stromschlusses bis zur Unterbrechung (Zeitdauer T_1), die zweite von der Unterbrechung bis zum abermaligen Stromschluß (Zeitdauer T_2).

Man hat also

$$T = T_1 + T_2. \tag{1}$$

In der ersten Phase ist die Stromstärke bekanntlich in jedem Zeitpunkt t durch die Beziehung bestimmt

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right) \tag{2}$$

wo E die Betriebsspannung, w der Widerstand und L die Selbstinduktion des Schließungskreises, e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Den Widerstand w des Schließungskreises hat man, wie gesagt, im Wesentlichen auf die Oberfläche der Anode beschränkt zu betrachten. Da allgemein der Widerstand einer Flüssigkeitssäule $w = \frac{Kl}{q}$ ist, wo l und q Länge und Querschnitt der Säule, K der spezifische Widerstand der Flüssigkeit ist, so gilt im vorliegenden Falle $w = \frac{Kl}{0}$, wo $0 = q$ die Anodenoberfläche bedeutet. Da wir über l nur das eine sagen können, daß es für denselben Unterbrecher denselben Wert haben wird, so erhalten wir

$$w = \frac{k}{0}. \tag{3}$$

1) Vgl. dazu F. Richarz, Wied. Ann. 44, p. 218 und p. 222, 1891, Bd. 47, p. 579 ff., 1892; ibid. 48, p. 708 ff., 1893.

wenn wir die durch die Temperaturänderung bei wachsender Stromstärke bewirkte Veränderung von K einmal außer Acht lassen und einen mittleren Wert von K für die ganze Unterbrechungsperiode als constant setzen[1]).

Im vorliegenden Falle wird der Strom nach der Gl. (2) wachsen, bis die von ihm an der Anodenoberfläche entwickelte Joulesche Wärme so groß ist, daß dort eine Verdampfung und somit Stromunterbrechung eintritt.

Die hierzu nötige Wärme muß nach der oben scizzirten Vorstellung und den unter 6 mitgeteilten Versuchen für jeden Unterbrecher immer denselben Wert c_1 haben, der bei verschiedenen Unterbrechern das Resultat des Zusammenwirkens der Wärmefaktoren der Anode und ihrer Umgebung ist. Langsame Flüssigkeitsströmungen, die beim Betriebe des Unterbrechers auftreten, werden den Vorgang nicht beeinflussen, da derselbe so schnell abläuft, daß dagegen die Flüssigkeitsbewegung nicht in Betracht kommt. Man erhält also den Ansatz

$$0{,}24 \int_0^{T_1} i^2 w\, dt = c_1. \tag{4}$$

Setzt man hierin i aus (2) ein und integriert, so erhält man schließlich

$$\frac{0{,}24\, E^2}{w}\left\{T_1 - \frac{2L}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}T_1}\right) + \frac{L}{2w}\left(1 - e^{-\frac{2w}{L}T_1}\right)\right\} = c_1. \tag{5}$$

Mit Rücksicht auf Gl. (2) nennt man bekanntlich die Zeitgröße $t = \frac{L}{w}$, welche $e^{-\frac{w}{L}t}$ zu $\frac{1}{e}$ macht, die Zeitconstante. Es ist das praktisch meist eine sehr kleine Zeitgröße. Im vorliegenden Falle wurde L der Primärspule des Induktoriums zu 4.10^6 cm, der Widerstand des Unterbrecherkreises zu ca. 40 Ohm gemessen[2]). Somit ist die Zeitconstante von der Größenordnung $^1/_{10000}$ Sekunde. Der Strom hat also schon längere Zeit in seiner vollen Stärke $\frac{E}{w}$ angedauert, ehe die Unterbrechung eintritt, $\frac{L}{w}$ ist gegen T_1 klein,

$$e^{-\frac{T_1 . w}{L}} \text{ und } e^{-\frac{2w}{L}T_1}$$

sind kleine Brüche, welche neben 1 zu vernachlässigen sind.

---

1) Vgl. dazu F. Richarz, Wied, Ann. 39, p. 81 ff., 1890; ibid. 47, p. 573 ff., 1892.

2) Vgl dazu F. Richarz, Wied. Ann. 47, p. 575, 1892.

Damit wird aus (5)

$$\frac{E^2}{w}\left(T_1 - \tfrac{3}{4}\frac{L}{w}\right) = \frac{c_1}{0{,}24} = C_1$$

woraus

$$T_1 = \tfrac{3}{4}\frac{L}{w} + \frac{C_1 w}{E^2} \tag{6}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (3)

$$T_1 = \tfrac{3}{4}\frac{Lo}{k} + \frac{C_1 k}{E^2 o}. \tag{6a}$$

Die Zeitdauer T_2 der zweiten Phase des Unterbrechungsvorgangs ist durch die Schnelligkeit bestimmt, mit der sich die Anode und ihre Umgebung wieder abkühlt, d. h. sie ist die Zeit, die vergeht, bis die isolierende Dampfschicht sich wieder condensiert hat. Auch sie wird eine complicierte Funktion der Wärmefaktoren von Anode und Umgebung sein, worauf noch unten zurückgekommen werden wird. Hier genügt es, darüber klar zu werden, daß bei demselben Unterbrecher, mit gleichbleibender Temperatur der Füllflüssigkeit T_2 stets dasselbe sein muß, was im Uebrigen für Versuchsbedingungen bestehen. Denn da jedesmal dieselbe Wärmemenge c_1 angesammelt werden muß, um die Unterbrechung zu bewirken, so wird auch stets die gleiche Zeit vergehen, bis dieselbe wieder verschwunden ist, wenn nur die Temperatur der Umgebung der Anode dieselbe bleibt. Man hat somit

$$T_2 = C_2. \tag{7}$$

Setzt man jetzt T_1 und T_2 aus (6) und (7) in (1) ein, so folgt

$$T = T_1 + T_2 = \tfrac{3}{4}\frac{L}{w} + \frac{C_1 w}{E^2} + C_2 \tag{8}$$

oder

$$T = \tfrac{3}{4}\frac{Lo}{k} + \frac{C_1 k}{E^2 o} + C_2 \tag{8a}$$

eine Gleichung, welche für einen bestimmten Wehnelt-Unterbrecher die Unterbrechungsperiode als Funktion der Betriebsspannung, der Anodenoberfläche und der Selbstinduktion des Schließungskreises bestimmt.

9. In Uebereinstimmung mit den unter 2 angeführten Beobachtungen lehrt die Gleichung (8a):

a) Die Unterbrechungszahl wächst mit wachsender Betriebs-

spannung, sie nimmt ab mit wachsender Größe der Anodenoberfläche und mit wachsender Selbstinduktion.

b) Die Stromstärke, wie sie am Hitzdrahtampermeter gemessen wird, ist im vorliegenden Falle

$$J = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T_1} i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T_1} \frac{E^2}{w^2}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right)^2 dt}.$$

Die Integration ergiebt nach Formel (5) unter Berücksichtigung des dort Gesagten

$$J = \sqrt{\frac{E^2}{w^2 T}\left(T_1 - \tfrac{3}{2}\frac{L}{w}\right)}. \tag{9}$$

Setzt man nach Gl. (6a) T_1 ein, so erhält man

$$J = \sqrt{\frac{C_1 o}{kT}}, \tag{10}$$

woraus schließlich mit Benutzung von (8a) wird

$$J = \sqrt{\frac{C_1}{\frac{3}{2}L + \frac{C_1 k^2}{o^2 E^2} + \frac{C_1 k}{o}}} \tag{11}$$

was wieder in Uebereinstimmung mit den unter 2 angeführten Beobachtungen besagt, daß die Stromstärke mit zunehmender Betriebsspannung und wachsender Anodenoberfläche schnell zu-, mit wachsender Selbstinduktion des Schließungskreises abnimmt.

c) Die Stromkurve muß so verlaufen, wie es Spieß und Wehnelt aus ihren Versuchen schließen, d. h. sie muß auf der Nulllinie horizontale Stücke von der Länge T_1 aufweisen.

d) Die Temperatur muß sich, soviel sich übersehen läßt, so geltend machen, wie es die Beobachtungen zeigen. Die Messungen, die ich selbst unter Variation der Flüssigkeits-Temperatur zwischen 20° und 60° gemacht habe, ergeben, daß die Unterbrechungsperiode T zunächst mit steigender Temperatur etwas abnimmt, dann von einem Minimum aus schnell wächst, bis bei 60° der Unterbrecher unsicher zu arbeiten anfängt. Das spricht dafür, daß sich zwei Temperatureinflüsse entgegenarbeiten, wie es auch die Theorie erwarten läßt. Denn einmal wird (Formel 8) das w mit wachsender Temperatur kleiner, da die Leitfähigkeit der Säure zunimmt; ferner wird die bis zur Verdampfung zuzuführende Wärmemenge C_1 kleiner, je höher die Temperatur der Säure ist; beides Einflüsse, welche T verkleinern. Dem wirkt

entgegen die mit wachsender Temperatur schnell wachsende Abkühlungszeit C_2, denn dieser Einfluss sucht T zu vergrößern.

Somit giebt die hier entwickelte Theorie des Wehnelt-Unterbrechers qualitativ alle bisherigen Beobachtungen wieder.

10. Quantitativ konnte die Gleichung (8) einstweilen erst insoweit geprüft werden, als sie die Unterbrechungsperiode als Funktion der Betriebsspannung enthält. Da die Untersuchungen immer mit demselben Induktorium bei gleichbleibender Belastung gemacht sind, so ist L constant zu setzen; ebenso war w constant, da mir ein Unterbrecher mit regulierbarer Anodenoberfläche erst seit Kurzem zu Gebote steht.

Somit wird aus Gl. (8)

$$(12) \qquad T = A + \frac{B}{E^2}, \text{ wo } A = \tfrac{3}{2}\frac{L}{w} + C_2 \text{ und } B = C_1 w.$$

Mit zunehmender Betriebsspannung nähert sich also die Unterbrechungszeit asymptotisch einem Minimalwerte

$$T_0 = \tfrac{3}{2}\frac{L}{w} + C_2.$$

In Tabellen III und IV sind zwei entsprechende Versuchsreihen wiedergegeben. Zuerst wurden die Constanten B, dann A aus den Versuchen berechnet. Die Rubrik $T.10^5$ ber. enthält die nach den gefundenen Formeln berechneten Werte von T.

Tabelle III:

$f = 15$ cm, $p = 5{,}5$ mm, $d = 8$ mm,

$$T.10^5 \text{ ber.} = 107 + \frac{610000}{E^2}.$$

Platten-No.	E Volt.	$T.10^5$ beob.	$T.10^5$ ber.	Δ	Δ %
24	140	138	138	± 0	± 0
25	130	143	143	± 0	± 0
26	120	152	149	− 3	− 2
27	110	163	157	− 6	− 3,6
28	100	174	168	− 6	− 3,6
29	90	183	182	− 1	+ 0,5
30	80	195	202	+ 7	+ 3,7
31	70	213	221	+ 8	− 3,7
32	60	260	251	− 9	− 3,5
33	50	405	351	− 54	− 10
34	40	538	487	− 51	− 10

Tabelle IV:

$f = 20\,\text{cm}$, $p = 5{,}5\,\text{mm}$, $d = 0{,}8\,\text{mm}$.

$$T.10^5 \text{ ber.} = 125 + \frac{860000}{E^2}.$$

Platten-No.	E Volt.	$T.10^5$ beob.	$T.10^5$ ber.	Δ	Δ %
35	140	174	169	−5	−2,9
36	130	172	176	+4	+2,2
37	120	186	185	−1	−0,5
38	110	192	196	+4	+2,0
39	100	210	211	+1	+0,5
40	90	238	231	−7	−3,0
41	80	265	259	−6	−2,3
42	70	305	300	−5	−1,6
43	60	352	364	+12	+3,3

Die oben entwickelte Theorie giebt also auch quantitatv die Beobachtungen mit großer Zuverlässigkeit wieder, soweit die Abhängigkeit von der Betriebsspannung in Frage kommt.

Ueber die Versuche mit denen ich beschäftigt bin, die Theorie in ihren weiteren Folgen quantitativ zu bestätigen, hoffe ich bald berichten zu können. Es bieten namentlich die Gleichungen 9 bis 11 die Handhabe zur experimentellen Ermittelung der Constanten C_1 und C_2, über deren zunächst noch wenig zu übersehende Natur damit Aufschluß zu erwarten ist. Ferner bin ich beschäftigt, den Einfluß der Selbstinduktion, sowie die Stromcurve der Unterbrechungen nach einer Methode zu untersuchen, welche sich auf die elektromagnetische Drehung der Polarisationsebene gründet.

11. Für die Anwendung des Wehnelt-Unterbrechers beim Betriebe von Induktorien ist es wichtig, noch die maximale Stromstärke J_{T_1} abzuleiten, welche im Momente der Unterbrechung besteht, und die für die Funkenlänge im Sekundärkreise maaßgebend ist. Zu dem Zwecke hat man in Gl. (2)

$$i = \frac{E}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right)$$

für t die Zeit T_1 aus 6 einzusetzen und erhält schließlich

$$(13) \qquad J_{T_1} = \frac{E}{w}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{3}{2} - \frac{C_1 w^2}{L E^2}}}\right) = \frac{Eo}{k}\left(1 - \frac{1}{e^{\frac{3}{2} - \frac{C_1 k^2}{oLE^2}}}\right)$$

$$(13a) \qquad = J_{max} - \frac{J_{max}}{e^{\frac{3}{2} - \frac{C_1}{L J_{max}^2}}}$$

Je größer die Betriebsspannung und je größer die Anodenoberfläche, desto größer wird das J_{max}, desto kleiner wird aber auch das zweite Glied der Kammer. Den gleichen Einfluß hat eine Vergrößerung der Selbstinduktion. Mit wachsender Betriebsspannung wächst der Wert von J_{T_1} sehr schnell und nähert sich asymptotisch dem Werte

$$J_{max} - \frac{J_{max}}{e^{\frac{1}{2}}} = \tfrac{7}{9}\, J_{max}.$$

12. Von den unter 2 aufgezählten Eigenschaften des Wehnelt-Unterbrechers bleibt somit nur noch die eine aufzuklären, warum er nur in einem Sinne arbeitet, d. h. nur dann, wenn die kleinere Elektrode die Anode ist. Die Theorie giebt darüber zunächst keinen Aufschluß. Doch ließe sich denken, daß die Wärmeleitfähigkeit des elektrolytisch abgeschiedenen Gases unter Umständen die Wirkung einseitig gestalten könne. Denn wenn ein Gas mit so großer Wärmeleitfähigkeit wie Wasserstoff die kleinere Elektrode umspült, so wird die entwickelte Joulesche Wärme sehr schnell in die Umgebung abgeleitet und es kommt unter Umständen nicht zu einer Verdampfung. Ist das richtig, so muß eine Steigerung der Betriebsspannung doch schließlich zum Ziele führen. Ein Versuch mit 300 Volt bestätigte das. Jetzt trat eine Unterbrechung auch ein, wenn die kleinere Platinelektrode Kathode war. Aber es zeigte sich eine weitere Erscheinung, die der ersten Ueberlegung scheinbar wiederspricht: nämlich die Platinspitze wurde sehr schnell weißglühend und schmolz ab. Hier ist also noch eine zweite Wirkung des abgeschiedenen Kathions anzunehmen, welche die Erscheinung compliciert.

Um zu prüfen ob etwa eine Wirkung des Wasserstoffs auf das heiße Platin vorliege, wurde der Versuch mit einer Füllung von Kupfer- oder Zinkvitriollösung wiederholt: Jetzt wirkte der Unterbrecher ebensowohl in dem einen, wie in dem anderen Sinne. Somit ist es eine Wirkung des Wasserstoffs auf das Platin, welche bei dem Wehnelt-Unterbrecher in der gewöhnlichen Form die Einseitigkeit bestimmt.

Es liegt nahe an die Adsorptions- oder Diffusionswirkungen zu denken, wie sie beim Platin und Wasserstoff schon mehrfach beobachtet sind. Wie ich sehe, haben auch die Herren Koch und Wüllner[1]), sowie Herr Richarz und andere bereits solche Wirkungen zur Erklärung gewisser Unregelmäßigkeiten herangezogen,

1) R. Koch und A. Wüllner, Wied. Ann. 45, p. 774, 1892.

die sich ihnen bei der Untersuchung des Uebergangswiderstandes kleiner Platinelektroden in verdünnter Schwefelsäure zeigten[1]). Die Entzündung des Wasserstoffs durch Platinmoor ist die bekannteste Erscheinung der Art. Ferner gehört folgender interessante Versuch von Bellati und Lussana[2]) hierher: Ein Barometer wurde oben durch eine aufgesetzte Eisenplatte verschlossen und durch Aufkitten eines Glasringes ein Voltameter hergestellt, dessen Boden und gleichzeitig Kathode die Eisenplatte bildete; sobald der Strom geschlossen wurde, fiel das Quecksilber im Barometer, indem der auf der oberen Seite der Eisenplatte elektrolytisch entwickelte Wasserstoff in die Barometerleere diffundierte. Schließlich sei ein Versuch erwähnt, den Professor Planck in seiner Vorlesung einmal mitteilte: Ein Glasballon mit einem in die Wand eingeschmolzenen Platindrahte wurde mit Wasserstoff gefüllt. Wurde jetzt der Platindraht längere Zeit durch eine Bunsenflamme glühend gehalten, so war schließlich der Wasserstoff durch das glühende Platin herausdiffundiert. Eine solche ja stets mit starker Wärmeentwicklung verbundene Diffusion und Occlusion des elektrolytisch abgeschiedenen Wasserstoffs in die heiße Platinspitze liegt offenbar bei dem Wehnelt-Unterbrecher vor, wenn dieselbe Kathode ist, und bewirkt, daß schließlich das Platin weißglühend wird und abschmilzt.

Somit ist die Einseitigkeit des Wehnelt-Unterbrechers in seiner gewöhnlichen Form eine sekundäre Erscheinung, die mit dem eigentlichen Unterbrechungsvorgang nichts zu thun hat.

Göttingen, Physikalisches Institut der Universität,
25. April 1899.

1) F. Richarz, Wied. Ann. 47, p. 582, 1892.

2) Atti R. Ist. Veneto (7), 1 p. 1173, 1890. Vgl. Nernst, Theor. Chemie II. Aufl., p. 167, 1898.

Notiz über schnelle Funkenentladungen.

Von

Hermann Th. Simon.

Vorgelegt von Eduard Riecke in der Sitzung am 6. Mai 1899.

Wird ein größeres Funkeninduktorium mit einem Unterbrecher von hoher Unterbrecherzahl (z. B. Wehnelt-Unterbrecher) betrieben, so geht die gewöhnliche hellglänzende, zickzackförmige und knatternde Funkenentladung zwischen zwei Spitzen oder Kugeln in eine flammenbogenartige, lebhaft flackernde Entladungsform über, deren Bahn keinerlei scharfe Zacken mehr aufweist. Gleichzeitig geht das Knallen in ein Pfeiffen über, die Farbe des Funkenlichtes erscheint verändert, die Helligkeit wesentlich verringert. Diese Erscheinung ist von Wehnelt[1]) und Spieß und Wehnelt[2]) in den Berichten über den „elektrolytischen Unterbrecher" beschrieben. Spieß und Wehnelt erwähnen dabei, daß man diesen „Flammenbogen" länger ausziehen kann, als sonst die maximale Schlagweite des benutzten Induktoriums beträgt. Das zeigt sich auch so: Hat man eine horizontale Funkenstrecke, so entsteht durch die im „Flammenbogen" entwickelte Erwärmung ein lebhafter Luftstrom, welcher denselben mit nach oben zu reißen sucht. Dabei vergrößert sich seine Bahn infolge der Krümmung oft weit über die gewöhnliche Länge, bis sie so großen Widerstand leistet, daß der Strom abbricht, um an der kürzesten Stelle der Funkenstrecke wieder einzusetzen. Läßt man die Entladung zwischen zwei Metallstangen überspringen, die so gegeneinander geneigt aufgestellt sind, daß sich nach oben hin ihr Ab-

1) A. Wehnelt, Elektrot. Zeitschr. Heft 4, 1899.

2) P. Spieß und A. Wehnelt, Verh. der deutsch. Physik. Gesellsch. I, p. 53, 1899.

stand vergrößert, so beginnt die Entladung an der engsten Stelle, wandert immer höher hinauf zu Stellen 4 bis 5 mal größeren Abstandes, bis sie schließlich zerreißt, um unten von neuem einzusetzen. (Es ist diese letzte Anordnung sehr geeignet, das Princip der modernen Blitzschutzapparate an elektrischen Anlagen zu demonstrieren.)

Bläst man in einen Entladestrom der beschriebenen Art Luft, so geht der „Flammenbogen" in die gewöhnliche zickzackförmige Funkenentladung über.

Ueber die besonderen Eigenschaften beider Entladungsformen giebt ihre photographische Aufnahme nach mancher Richtung hin interessanten Aufschluß. Man stellt dazu die Funkenstrecke zweckmäßig vertikal. Die Aufnahmen zeigen, daß die gewöhnliche Funkenentladung aus einzelnen Funken besteht, deren jeder eine besondere gezackte Bahn beschreibt; daß der „Flammenbogen" zwar auch aus vielen einzelnen Funken besteht, die aber alle dieselbe wellig gewundene Form aufweisen, und von denen jeder folgende immer sehr nahe dieselbe Bahn, wie der vorhergehende verfolgt. Auf der Photographie stellt sich die Aufeinanderfolge vieler Funken als ein Kurvensystem dar, welches auf einer vielfach gekrümmten und wellig gewundenen Fläche gezogen ist.

Noch deutlicher tritt die Aehnlichkeit der Formen aufeinanderfolgender Funken und die allmähliche Veränderung derselben hervor, wenn man die beschriebene Entladungserscheinung auf einer bewegten Platte so photographiert, daß die aufeinanderfolgenden Funken nebeneinander abgebildet werden. Dann erscheinen die einzelnen Funkenbahnen als nahezu parallele wellig gewundene Kurven von identischem Krümmungscharakter.

Aus dieser Analyse des Flammenbogens ist zu entnehmen: Wenn die Funken in einer Funkenstrecke häufig genug aufeinanderfolgen, so findet jeder folgende durch den vorhergehenden eine Bahn vorbereitet. Diese Bahn ist infolge irgend einer durch den Durchgang eines Funkens bewirkten physikalischen Veränderung der sie bildenden Luft geeigneter, einen folgenden Funken aufzunehmen, als jede andere. Wenn die Luft, in der diese Bahn verläuft, bewegt ist, so wird auch der nächste Funken immer räumlich gegen den vorhergehenden verschoben erscheinen, doch so, daß der Gesamtcharakter der Funkenbahn derselbe bleibt.

Da also die einmal vorbereitete Funkenbahn dem Durchgang eines Funkens einen viel kleineren Widerstand bietet, also gewöhnliche Luft, so erklären sich ohne Weiteres die oben erwähnten Eigen-

schaften des „Flammenbogens“: daß man ihn länger ausziehen kann, wie die gewöhnliche maximale Schlagweite des Induktoriums beträgt; daß er beim Ueberspringen zwischen geneigten Stangen einen vier- bis fünffach größeren Weg durch eine vorbereitete Luft-Bahn vor dem einfachen in gewöhnlicher Luft bevorzugt ect.

Da bei langsamen Entladungen die einzelnen Funken jedesmal eine andere Bahn suchen, so ist zu schließen, daß die erwähnte Vorbereitung einer Funkenbahn durch einen vorangegangenen Funken nur eine bestimmte Zeit anhält. Es schien mir von großem Interesse, diese Zeit zu bestimmen, um weiterhin über die Natur der beschriebenen Erscheinung näheren Aufschluß zu erlangen. Zu dem Zwecke habe ich eine Reihe von Versuchen nach folgender Methode angestellt: Die Funkenentladungen zwischen den Spitzen einer vertikal gestellten Funkenstrecke wurden auf einer an einem Fallpendel befestigten photographischen Platte aufgenommen und mit Hülfe der vorher ermittelten Pendelgeschwindigkeit die Zeit zwischen zwei Funken gemessen.

Durch mannigfache Veränderung der Betriebsbedingungen eines Wehnelt-Unterbrechers, wie er zu den Versuchen benutzt wurde, konnte man die Unterbrechungszahl variieren und diejenige ermitteln, bei der die Flammenbogenentladung gerade anfing, in die gewöhnliche Funkenentladung überzuspringen.

Aus diesen Versuchen ergaben sich mit guter Uebereinstimmung vorläufig folgende Resultate:

1. Die Bahn eines Funkens, der zwischen Spitzen in ruhender Luft von gewöhnlichem Druck überspringt, wird auch von einem folgenden Funken allen anderen Bahnen vorgezogen, solange derselbe nicht später als 0,0028 Sekunden auf den ersten folgt. Folgt er nach dieser Zeit, so wählt er sich eine neue zickzackförmige Bahn.

2. Von der Länge der Funkenstrecke scheint diese Zeit in weiten Grenzen unabhängig zu sein.

3. Soweit die bisherigen Versuche übersehen lassen, ist die Dauer des beschriebenen Leitungszustandes einer Funkenbahn von dem Material der Spitzen, zwischen denen die Funken überspringen, unabhängig.

Ich bin damit beschäftigt, den Einfluß der Temperatur und des Druckes der Luft auf die Zeitdauer des beschriebenen Zustandes zu untersuchen, ferner auch für andere Gase als Luft die entsprechenden Daten zu gewinnen.

Das Bild, welches ich mir auf Grund der bisherigen Versuche von dem Vorgange gemacht habe, läßt erwarten, daß sich eine Beziehung der Zeitdauer der Erscheinung zu den Constanten der kinetischen Gastheorie ergeben dürfte. Doch wäre einstweilen jede Spekulation darüber verfrüht, solange nicht weitere Versuche eine bestimmte Handhabe bieten.

Göttingen, Physikalisches Institut der Universität,
April 1899.

Ueber die Verteilung der Stetigkeits- und Unstetigkeitspunkte bei punktweise unstetigen Functionen einer reellen Variabeln.

Von

A. Schönflies in Königsberg in Pr.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 22. Juli 1899.

Im Folgenden teile ich einige Resultate mit, die die Lage der Unstetigkeitspunkte einer reellen endlichen Function einer reellen Variabeln betreffen und als deren Bereich ich der Einfachheit halber die Strecke 0..1 wähle. Sätze allgemeineren Inhalts sind auf diesem Gebiet nur wenige vorhanden [1]), insbesondere solche, die sich an die Begriffe der Mengenlehre knüpfen. Andrerseits wird aber meines Erachtens das Verständniß und die Anschaulichkeit der bezüglichen Verhältnisse durch die Hilfsmittel der Mengenlehre wesentlich gefördert; aus diesem Grunde scheint mir die Mitteilung der folgenden Sätze hinlänglich gerechtfertigt zu sein.

Ich schicke zunächst folgende Bemerkung voran. Ist a ein beliebiger Wert der Variabeln und $a-\varepsilon \ldots a+\varepsilon$ ein ihn einschließendes Intervall [2]), so soll die Functionsschwankung in diesem Intervall durch σ bezeichnet werden. Convergirt ε gegen Null, so convergirt die Schwankung σ gegen eine untere Grenze k, die man, falls sie von Null verschieden ist, den Sprung an der Stelle a nennt, die ich aber lieber als den Unstetigkeits-

1) Eine Zusammenstellung der Hauptresultate gab z. B. Herr Pasch in Ann. 30, S. 139 ff.

2) Dem Intervall mögen die Endpunkte zugerechnet werden. Es ist belanglos, hier zwischen dem äußeren, dem inneren Intervall u. s. w. zu unterscheiden.

grad ω an der Stelle a bezeichnen möchte. Aus dieser Definition folgt, daß jeder Stelle α eine bestimmte Zahl k zugehört, so daß für $k' > k$ stets Intervalle $a-\varepsilon' \ldots a+\varepsilon'$ existiren, in denen $\sigma \leqq k'$ ist, während es für $k' < k$ solche Intervalle nicht giebt.

Es besteht nun der Satz, daß jede Grenzstelle von Punkten $\omega \geqq k$ selbst ein Punkt $\omega \geqq k$ ist. Dieser Satz ist sozusagen selbstverständlich, und doch ist er bisher nicht benutzt worden. Da er die Grundlage der folgenden Resultate bildet, so möge ein exacter Beweis hier eine Stelle finden.

Seien $a_1, a_2, a_3 \ldots$ Punkte $\omega \geqq k$ und α ihre Grenzstelle. Wäre nun α kein Punkt $\omega \geqq k$, so müsste es eine Größe $k_1 < k$ geben, so daß α ein Punkt $\omega = k_1$ ist. Alsdann wähle man k' so, daß $k_1 < k' < k$ ist; so gäbe es sicher ein Intervall $\alpha-\varepsilon \ldots \alpha+\varepsilon$, in dem $\sigma \leqq k'$ wäre. Innerhalb dieses Intervalls gäbe es daher auch Punkte a_n, resp. Intervalle $a_n-\varepsilon_n \ldots a_n+\varepsilon_n$ für die $\sigma \leqq k'$ wäre, was aber ausgeschlossen ist, da a_n ein Punkt $\omega \geqq k$ ist.

Liegen daher die Punkte $\omega \geqq k$ in einer Strecke überall dicht, so gehören ihnen alle Punkte der Strecke an. Soll also $f(x)$ in einem Intervall punktweise unstetig sein, so können die Punkte $\omega \geqq k$ nirgends dicht liegen; und da jeder Grenzpunkt ihnen zugehört, so folgt:

Bei einer punktweise unstetigen Function bilden die Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ für jedes k eine nirgends dichte, abgeschlossene Menge K.

Derartige Mengen sind uns aber in ihrem Bau wohlbekannt. Sie werden durch Strecken bestimmt, die von Punkten der Menge frei sind, die das Intervall überall dicht bedecken, und die entweder außer einander liegen oder nur mit den Endpunkten aneinander grenzen; und zwar besteht die bezügliche Menge aus den Endpunkten dieser Intervalle, sowie aus deren Grenzpunkten [1]).

Um hiervon eine Anwendung zu machen, beweise ich den Satz, den Herr Dini über Functionen aufgestellt hat, die Unstetigkeiten zweiter Art nur auf derselben Seite (links oder rechts) des bezüglichen Punktes haben [2]). Ist k beliebig und K wieder die zugehörige nirgends dichte Menge der Punkte $\omega \geqq k$, so ist nach einer von Herrn Cantor aufgestellten, wichtigen Formel [3])

1) Vgl. z. B. das von Herrn Cantor in Ann. 23, S. 470 gegebene Theorem, aus dem das obige folgt. Auch verweise ich auf meinen demnächst in Bd. 7 des Jahrb. d. d. M.V. erscheinenden Bericht über Mengenlehre.

2) Grundlagen für eine Theorie der Functionen etc. § 187, 4; S. 335.

3) Vgl. z. B. Math. Ann. 23, S. 466.

$$K = R + S,$$

wo R von der ersten Mächtigkeit ist, und S den etwa in K enthaltenen perfecten Bestandteil darstellt. Dieser ist aber für die betrachtete Menge notwendig Null, da eine perfecte Menge sowohl rechtsseitige, wie linksseitige Grenzpunkte besitzt. Es ist daher K von der ersten Mächtigkeit, und demnach der Inhalt von K Null, womit der Satz Dini's bewiesen ist.

Die Bedingung des obigen Satzes ist aber auch umkehrbar. Um dies darzutun, betrachte ich eine beliebige, gegen Null abnehmende Menge positiver Größen

$$k_0 > k_1 > k_2 \ldots > k_\nu > \ldots$$

und nehme an, daß jedem k_ν eine nirgends dichte Menge K_ν von Unstetigkeitspunkten $\omega \geqq k_\nu$ entspricht. So ergiebt sich eine Reihe von Mengen

$$K_0, K_1, K_2, \ldots K_\nu \ldots.$$

deren jede alle vorhergehenden als Teilmengen enthält, und die für $\lim k_\nu = 0$ die sämmtlichen Unstetigkeitspunkte mehr und mehr absorbiren. Es kann nun vorkommen, daß die Punkte von K_ν mit wachsendem ν in jedes Intervall eindringen und das Intervall $0 \ldots 1$ zuletzt überall dicht bedecken, doch braucht dies natürlich nicht der Fall zu sein. Jedenfalls aber kann man nachweisen, daß die Stetigkeitspunkte noch überall dicht liegen. Ist nämlich $a \ldots b$ irgend ein Intervall, so ist es entweder von Punkten der Menge K_0 frei, oder aber es giebt doch in ihm ein solches Intervall $\alpha_0 \ldots \beta_0$. Für dieses Intervall giebt es wieder ein analoges Intervall $\alpha_1 \ldots \beta_1$, das von Punkten von K_1 frei ist, u. s. w., man erhält so zwei Folgen

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \quad \text{und} \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots,$$

die zwei Punkte α' und β' bestimmen. Diese fallen entweder zusammen und liefern dann einen Stetigkeitspunkt oder aber sie bestimmen ein Intervall, dessen sämmtliche Punkte Stetigkeitspunkte sind. D. h.

Bilden die Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq k$ für jedes k eine nirgends dichte Menge, so ist die zugehörige Function punktweise unstetig.

Damit ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür gefunden, dass eine Function punktweise unstetig ist. Hankel katte bekanntlich ebenfalls eine solche Bedingung aufgestellt[1]);

1) Tübinger Univ.-Progr. 1873, S. 25. Vgl. auch Ann. 20, S. 87.

sie knüpfte sich an den Inhalt der Mengen K_ν, hat sich jedoch nicht als richtig erwiesen. Das vorstehende zeigt, daß der Inhaltsbegriff die Stetigkeitsfragen nicht beeinflußt, von ihm hängt nur die Integrirbarkeit ab. Es ist nicht schwer, die Hankelsche Bedingung auch in dieser Hinsicht durch eine richtige Formulirung zu ersetzen.

Aus der Formel $K = R + S$ folgt, daß für den Inhalt von K nur der Inhalt der perfecten Menge S in Frage kommt, da ja R immer den Inhalt Null hat. Die Inhaltsfrage ist damit auf die Untersuchung der perfecten Mengen reducirt. Nun wird jede perfecte Menge S durch einander ausschließende Intervalle bestimmt, die von Punkten der Menge frei sind, und besteht aus den Endpunkten dieser Intervalle, sowie aus den Grenzpunkten ihrer Endpunkte[1]). Sei nun l das größte punktfreie Invervall der Strecke $0 \ldots 1$ und zerlege die Gesammtstrecke in die drei Intervalle u_1, l, u_2. Ebenso sei l_1 das größte punktfreie Intervall innerhalb u_1, und l_2 das größte derartige Intervall für u_2. Dadurch mögen u_1 und u_2 in u_{11}, l_1, u_{12}, resp. u_{21}, l_2, u_{22} zerfallen, und es seien wieder l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} die größten punktfreien Intervalle von u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} u. s. w. Nach Ausscheidung von l bleibt von der Einheitsstrecke noch das Intervall $1-l$ für die Punkte der Menge S zur Verfügung. Setzen wir nun

$$l_1 + l_2 = l'(1-l);\ l' < 1,$$

so bleibt für die Punkte von S jetzt nur noch das Intervall

$$1-l-l'(1-l) = (1-l)(1-l')$$

zur Verfügung. Von ihm werden die Strecken l_{ik} ausgeschieden; setzen wir

$$l_{11} + l_{12} + l_{21} + l_{22} = l''(1-l)(1-l');\ l'' < 1,$$

so bleibt von der Gesammtstrecke nur noch das Intervall

$$(1-l)(1-l')(1-l'')$$

zur Verfügung u. s. w.; und daraus folgt nun sofort:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die perfecte Menge S den Inhalt Null besitzt, besteht darin, daß das Product

$$(1-l)(1-l')(1-l'')\ldots.$$

gegen Null convergirt.

---

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 172. Für das genauere verweise ich wieder auf meinen demnächst erscheinenden Bericht über Mengenlehre im Jahrb. d. deutsch. Math. Vereing. Bd. 7.

von dem Wert, der den Stellen von Q entspricht, verschieden sein, und es kann daher x kein Stetigkeitspunkt sein. Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt aus ihm, daß die Menge Q die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen muß, damit eine an allen Stellen von Q constante Function punktweise unstetig sein kann. Man kann z. B. keine punktweise unstetige Function bilden, die nur an den rationalen Stellen einen constanten Wert hat [1]).

Weitergehende Schlüsse lassen sich nicht machen, da ja die Mengen K Grenzpunkte besitzen können, die der Menge Q angehören. Man kann z. B. vorschreiben, daß die Function an den Stellen einer nirgends dichten unendlichen Menge Q_1 einen ebenfalls constanten Wert besitzt; dann sind alle Punkte von Q_1, sowie deren Grenzpunkte Unstetigkeitspunkte; diese Grenzpunkte aber sind Punkte von Q.

Functionen, für die die einzelnen Mengen K_ν aus unendlich vielen Punkten bestehen, sind bisher nur in geringem Maaße aufgestellt worden [2]). Ich möchte daher zum Schluß dieser Note ein Beispiel einer Function aufstellen, das in dieser Hinsicht das äußerste leistet, was möglich ist. Ich werde nämlich eine Function angeben von folgender Eigenschaft.

1) Für jeden Wert $0 < \xi \leqq 1$ giebt es eine Menge G_ξ, in deren Punkten der Unstetigkeitsgrad ω genau den Wert ξ hat; die Gesammtheit dieser Mengen G_ξ hat also die Mächtigkeit des Continuums;

2) jede Menge G_ξ besitzt selbst die Mächtigkeit des Continuums; und

3) die Function ist längs unendlich vieler überall dicht verteilter Intervalle constant, so daß selbst die Gesammtheit der Punkte aller Mengen G_ξ nur eine nirgends dichte Menge bildet.

Dies kann folgendermaßen geschehen. Aus dem Intervall $0 \ldots 1$ greife ich alle Punkte heraus, die als Decimalbrüche geschrieben nur die Ziffern 0 und 1 enthalten [3]), und zwar mit Aus-

---

1) Vgl. hierzu auch Volterra, Giorn. d. Mat. Bd. 19, S. 76.

2) Ein Beispiel einer solchen Function giebt Herr Brodén in Ann. 51, S. 314.

3) Die obige Construction der Mengen G_ξ deckt sich der Sache nach mit derjenigen, die ich in diesen Nachrichten, 1896, Heft 4 veröffentlicht habe. Ich füge hinzu, daß Mengen der Form 0, $a_1 a_2 a_3 \ldots$. für alle $a_i = 0$ oder 1, sowie andere durch Zifferngesetze definirte Mengen von der Mächtigkeit des Continuums schon vorher von Herrn Cantor construirt und benutzt worden sind (z. B. Ann. 21, S. 590); meine eigene Leistung reducirt sich darauf, für den Nachweis, daß diese Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, die einfache Formulirung

schluß derer, in denen von einer bestimmten Stelle an nur Nullen auftreten. Diese bilden eine nirgends dichte Menge G_0 der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$; einer ihrer Punkte sei

$$x_0 = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots\ .\quad a_i = 0 \text{ oder } 1.$$

Nun sei

$$\xi = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots\ .\quad b_i = 0 \text{ oder } 1$$

irgend ein analoger Bruch. so bilde man

$$x_\xi = x_0 + 2\xi = 0,\ c_1 c_2 c_3 \ldots\ .$$

so dass

$$c_i = a_i + 2b_i$$

ist, und bezeichne die mittelst eines festen ξ aus allen Punkten von G_0 abgeleiteten Punkte x_ξ durch G_ξ, so sind die Punkte von G_ξ unter sich und von den Punkten von G_0 verschieden. Das gleiche gilt aber auch für irgend zwei Mengen G_ξ und G'_ξ. Nämlich die Zahlen

$$0,\ c_1 c_2 c_3 \ldots\ . \quad \text{und} \quad 0,\ c'_1 c'_2 c'_3 \ldots\ .$$

sind dann und nur dann gleich, falls $c_i = c'_i$ ist, d. h.

$$a_i + 2b_i = a'_i + 2b'_i,$$

woraus wieder notwendig $a_i = a'_i$ und $b_i = b'_i$ folgt. Da nun die Werte ξ die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, so gilt dies auch von den Mengen G_ξ; andrerseits ist auch klar, daß diese Mengen die Strecke 0..1 immer noch nirgends dicht erfüllen, da sie nur Decimalbrüche mit den Ziffern 0 1 2 3 darstellen.

Lesen wir jetzt den Decimalbruch für ξ dyadisch, so wird dadurch, der obigen Festsetzung gemäß, jeder Wert zwischen 0 und 1 — Null ausgenommen — genau einmal dargestellt; ich will diesen Wert mit (ξ) bezeichnen. Bestimmt man nun eine Function $f(x)$ so, daß

$$f(x_\xi) = (\xi),\ \ f(x_0) = 0$$

ist, während $f(x)$ an allen andern Stellen ebenfalls den Wert Null hat, so stellt G_ξ eine Menge vom Unstetigkeitsgrad $\omega = (\xi)$ dar, während $f(x)$ in jedem innern Punkt eines Intervalls, das von den Punkten aller G_ξ frei ist, constant ist, und den Wert Null besitzt.

Man kann versuchen, die Function so abzuändern, daß die Stetigkeitspunkte kein auch noch so kleines Intervall ganz er-

---

zu benutzen, daß man jeden der obigen Decimalbrüche auch dyadisch lesen kann, und umgekehrt.

füllen. Der Versuch, dies etwa so zu erreichen, daß man statt des dekadischen Zahlsystems ein solches mit der Basis 4 benutzt, schlägt jedoch fehl. Dagegen führt folgendes Verfahren zum Ziel.

In einem Zahlsystem mit der Basis 3 sei wieder eine Menge G_0 definirt durch die Punkte

$$x_0 = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \quad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

mit Ausschluß derer, die von einer Stelle an lauter Nullen enthalten. Ich bilde nun die Menge G_n, die folgendermaßen definirt ist. Sie enthält alle Punkte, die höchstens an den ersten n Stellen eine Zwei enthalten, doch so daß die $n$te Stelle wirklich eine Zwei ist. Es ist dann G_n von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und nirgends dicht, und es sind auch hier wieder alle Mengen G_n ohne gemeinsame Punkte. Es bleiben jetzt noch diejenigen Punkte, in denen die Zwei unendlich oft auftritt; sie zerfällen wir noch in zwei Mengen G' und G, und zwar soll G alle diejenigen enthalten, in denen von einer bestimmten Stelle an nur Zweien vorkommen. Jeden dieser Punkte von G kann man auch so schreiben, daß er von einer bestimmten Stelle an lauter Nullen enthält; er enthält alsdann nur eine endliche Anzahl von Zweien und kann nun einer Menge G_ν hinzugefügt werden. Ist G'_ν die so vermehrte Menge, so haben wir damit die Mengen

$$G_0,\ G'_1,\ G'_2,\ \ldots\ G'_\nu,\ \ldots\ldots\ G'$$

construirt, und es ist leicht ersichtlich, daß jetzt G' eine überall dichte, aber nirgends zusammenhängende Menge ist [1]). Die Punkte von G'_ν seien x'_ν.

Wird nun wieder eine Reihe gegen Null convergirender Größen

$$g_0 > g_1 > g_2 \ldots\ldots$$

angenommen, und

$$f(x'_\nu) = g_\nu$$

gesetzt, dagegen $f(x') = 0$ für alle Punkte von G', so ist $f(x)$ eine Function der verlangten Beschaffenheit und ist an allen Punkten der Menge G' stetig.

---

1) Eine Function dieser Art, in der die Stetigkeitspunkte, sowie die Unstetigkeitspunkte nicht abzählbar sind und zugleich in jedem Intervall überall dicht liegen, hat Herr Brodén a. a. O. zu construiren versucht. Doch ist dieser Versuch als verfehlt zu bezeichnen. Denn die von ihm construirten Mengen von Unstetigkeitspunkten sind zwar nicht abzählbar, aber sie liegen gegen seine Behauptung nirgends dicht.

Königsberg, Juni 1899.

Seismometrische [illegible] Beobachtungen [illegible] Beobachtungen [illegible]

von

E. Wiechert.

Vorgelegt von W. [illegible] in der Sitzung [illegible]

Vorwort.

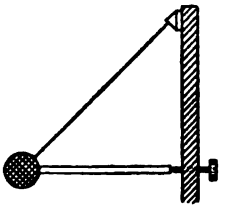
Im vorigen Jahre habe ich für das [illegible] Institut durch die hiesige Werkstätte für [illegible] G. [illegible] ein photographisch [illegible] herstellen lassen, und seit dem [illegible] der sorgfältigen Wartung des [illegible] in dauernder Thätigkeit ist. Im Folgenden [illegible] schreibung des Instrumentes und eine [illegible] rigen Erfahrungen gegeben werden.

§ 1. Pendel.

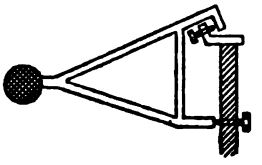
Die schönen Erfolge der italienischen Seismographen haben gezeigt, daß die mechanische Registrirung recht wohl geeignet ist, auch die schwachen Erdbewegungen aufzuzeichnen, auf welche in Göttingen allein zu rechnen ist, ja sie hat hierbei manches geleistet, was die photographische Registrirung bisher schuldig geblieben ist. Immerhin aber muß gefürchtet werden, daß die Reibung eines Schreibstiftes das Diagramm in seinen Einzelheiten entstellt, und ich hielt deßhalb für den Beginn der hiesigen seismometrischen Arbeiten die technisch einfachere photographische Registrirung für zweckmäßiger.

Besonders geeignet für die hiesigen Verhältnisse erschien ein „*Horizontalpendel*". Dabei war Auswahl zu treffen zwischen dem

„Faden-Spitze-“ und dem *2-Spitzen-System* (Figur 1 und Figur 2), welche beide große Erfolge aufzuweisen haben.



Figur 1.



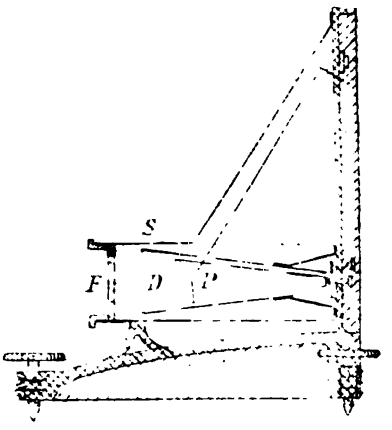
Figur 2.

Das 2-Spitzen-Pendel hat den Vorzug der kompendiöseren Form, dafür aber den schwer wiegenden Nachtheil, daß der Pendelrahmen in der Nähe der Drehungsaxe erhebliche Masse erhalten muß, wodurch die Spitzen *bei allen Erschütterungen des Instrumentes auch seitlich stark in Anspruch genommen werden.* Hierzu kommt noch, daß wegen des kurzen Abstandes der Spitzen ihre Belastung verhältnißmäßig groß ist und jede Veränderung ihrer Form auf Stellung und Empfindlichkeit des Pendels einen bedeutenden Einfluß ausübt. Da nun in meinem Falle das Pendel nicht weit von einer belebten Straße aufgestellt werden mußte, glaubte ich dem Faden-Spitze-Pendel den Vorzug geben zu müssen.

Bei dem nach diesen Erwägungen hergestellten Apparat bildet das Pendel, *P* in Figur 3, einen 20 cm langen Trichter aus feiner Kupferfolie, der am weiten Ende einen 5 cm großen, runden Hohlspiegel von Glas und am anderen ein nur schwach gewölbtes Achathütchen trägt. Indem so alle Masse möglichst an das äußere Ende verlegt ist, wird die Wirkung seitlicher Erschütterungen auf die Auflage möglichst herabgesetzt. Die Stahlspitze, gegen welche sich das Achathütchen legt, ist sorgfältig abgerundet und einigermaaßen, aber durchaus nicht besonders fein; auf diese Weise wird eine Beschädigung von Spitze und Hütchen vermieden und die Empfindlichkeit dennoch nicht geschädigt. — Eine sehr einfache, in der Figur angedeutete Arretirung ermöglicht es, das Pendel von der Spitze abzuheben.

Als bedeutender Uebelstand bei Erdbebenpendeln erscheinen in der Regel die *Eigenschwingungen des Instrumentes,* welche sich über die aufzuzeichnenden Bewegungen lagern und so das Bild in unerfreulicher Weise verwirren. Um dem zu entgehen, habe ich für eine *starke Luftdämpfung* Sorge getragen. Es ist für diesen Zweck am Statif ein Messingcylinder *D* befestigt, welcher das Pendel mit

einigen Millimetern Spielraum umgiebt und die Amplitude seiner Eigenschwingungen in 20 Sekunden auf ca. $^1/_{10}$ reducirt. — Pendel, Dämpfer und Faden werden zum Schutze gegen Luftströmungen von einer Blechhülse S umschlossen, die bei F ein Glasfenster trägt. Ueberdies ist der ganze Apparat durch einen Holzkasten überdeckt, der vor F eine Oeffnung hat.



Figur 3.

§ 2. Registrirung.

Gegenüber der mechanischen Registrirung hat die photographische in den gebräuchlichen Ausführungen den Nachtheil, daß die Kurven nicht fein genug und die Geschwindigkeit nicht groß genug ist, um die Bewegung der Erde in ihre Schwingungen aufzulösen; man begnügt sich im Allgemeinen damit, festzustellen, ob eine Bewegung überhaupt vorhanden ist oder nicht, und wie die Amplitude wechselt. Um hier mit geringen Kosten zu einem günstigeren Resultat zu kommen, bemühte ich mich, das optische System möglichst vollkommen zu gestalten und Geschwindigkeiten anwendbar zu machen, welche der mechanischen Registrirung entsprechen. —

Wie gewöhnlich wird Spalt, Hohlspiegel und Cylinderlinse verwendet; sie sind in Figur 4 mit S, H, C bezeichnet. Der Spalt

Figur 4.

befindet sich etwas über und — aus zufälligen Gründen — etwas vor der Walze W, die das photographische Papier trägt. Der Hohlspiegel hat ca. 1 m Brennweite und 50 mm Durchmesser; die Rückseite des $2^1/_2$ mm dicken Glases ist versilbert. Die Cylinderlinse, welche ebenso wie der Hohlspiegel von der Firma Reinfelder und Hertel, München, bezogen worden ist, hat 30 mm Brennweite, 11 mm Breite und 60 mm Länge.

Der Hohlspiegel H entwirft auf dem Papier der Walze W ein Bild, das durch die Cylinderlinse C zu einem Punkt verkürzt wird. Bei der gewöhnlichen Anordnung geschieht dieses, indem C für die Höhenrichtung ein Bild von H entwirft. Bei den von mir gestellten Anforderungen hätte sich so eine unzureichende Verkürzung ergeben. Ich setzte darum zwischen C und H eine Blende B in Form eines horizontalen Spaltes und brachte C in die zugehörige Stellung. Ueberdies erhielt C die angegebene verhältnißmäßig sehr kurze Brennweite. Bedeutet o die Breite der Oeffnung in B, h die Höhenausdehnung des Bildes auf der Walze, b den Abstand $B-C$, w den Abstand $W-C$, so folgt

$$h : o = w : b.$$

Im vorliegenden Falle ist w = ca. 30 mm, b = ca. 1700 mm, und ich verlangte $h = {}^1/_{10}$ mm, so mußte denn die Oeffnung in B nur 6 mm breit genommen werden. Bei dem großen Durchmesser von H erhält man trotz dieser starken Abblendung eine völlig hinreichende Lichtintensität.

Als Lichtquelle dient eine kleine flachbrennende Gasflamme in etwa 80 cm Entfernung hinter dem Spalt, deren Strahlen durch eine zwischengeschaltete Linse (Brillenglas) zu einem absichtlich unscharf gehaltenen Bilde auf den Spalt koncentrirt wird.

Diese Einrichtung ergiebt bei den fertigen Photogrammen je nach der Regulirung der Flamme Kurven von ${}^1/_{30}$—${}^1/_3$ mm Dicke. Wir verlangen jetzt, daß ${}^1/_{10}$ mm nicht erheblich überschritten wird und halten ${}^1/_5$ mm als nicht mehr ordnungsmäßig.

Das für einen Tag nothwendige photographische Papier (Dr. Stolze & Co., Charlottenburg) ist in einem 13 cm breiten und 40 cm langen Streifen auf der Messingwalze W aufgespannt, deren Umfang ca. $36{}^1/_2$ cm beträgt. Die überschüssigen Enden gehen durch einen ca. 1 mm breiten Spalt nach innen und werden durch Federn kräftig angespannt. Wie man sieht, wird der ganze Umfang der Walze bis auf eine kleine, praktisch unwesentliche Lücke von empfindlichem Papier überdeckt; indem nun die Walze durch den Zeiger einer Uhr in 1 Stunde einmal herumgedreht und zugleich um ca. 3 mm seitlich verschoben wird, erhält man zunächst eine Spirallinie und auf dem abgenommenen Papier eine Reihe von Parallellinien. Jede von diesen entspricht bei $36{}^1/_2$ cm Länge einer Stunde, sodaß 1 Minute durch etwa 6 mm und 1 Sekunde durch etwa ${}^1/_{10}$ mm dargestellt wird. Die so erreichte Geschwindigkeit ist 18—36 mal größer als bei v. Rebeur-Paschwitz, 6 mal größer als bei den Milne'schen Seismographen, noch etwa 3 mal größer

[illegible]

[illegible] Einwirkung [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] Sekunden

Hieraus [illegible]

[illegible]

von der [illegible] der Spitze [illegible]

[illegible] der Walze so würden die Auswei[illegible] als hätte das Pendel [illegible] zwischen Spitze und Papier. [illegible] vorgerückt ist, so vergrößert sich [illegible]

$s \cdot \frac{p}{a}$, wenn s den Abstand des Spaltes [illegible] den Lichtpunkt, p die Länge des Pendels [illegible] hütchen bis Hohlspiegel, a den Abstand des Spalt[illegible] spiegel bedeutet. Ist also noch A der Abstand [illegible] und Spitze, so wird die äquivalente [illegible]

$$s = 2A + s\frac{p}{a}$$

Im vorliegenden Fall ist $2A =$ [illegible] cm, $s =$ [illegible] cm, $p =$ [illegible] cm, $a = 180$ cm, also

$$s = [illegible]$$

sie knüpfte sich an den Inhalt der Mengen K_ν, hat sich jedoch nicht als richtig erwiesen. Das vorstehende zeigt, daß der Inhaltsbegriff die Stetigkeitsfragen nicht beeinflußt, von ihm hängt nur die Integrirbarkeit ab. Es ist nicht schwer, die Hankelsche Bedingung auch in dieser Hinsicht durch eine richtige Formulirung zu ersetzen.

Aus der Formel $K = R + S$ folgt, daß für den Inhalt von K nur der Inhalt der perfecten Menge S in Frage kommt, da ja R immer den Inhalt Null hat. Die Inhaltsfrage ist damit auf die Untersuchung der perfecten Mengen reducirt. Nun wird jede perfecte Menge S durch einander ausschließende Intervalle bestimmt, die von Punkten der Menge frei sind, und besteht aus den Endpunkten dieser Intervalle, sowie aus den Grenzpunkten ihrer Endpunkte[1]). Sei nun l das größte punktfreie Invervall der Strecke $0 \ldots 1$ und zerlege die Gesammtstrecke in die drei Intervalle u_1, l, u_2. Ebenso sei l_1 das größte punktfreie Intervall innerhalb u_1, und l_2 das größte derartige Intervall für u_2. Dadurch mögen u_1 und u_2 in u_{11}, l_1, u_{12}, resp. u_{21}, l_2, u_{22} zerfallen, und es seien wieder l_{11}, l_{12}, l_{21}, l_{22} die größten punktfreien Intervalle von u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22} u. s. w. Nach Ausscheidung von l bleibt von der Einheitsstrecke noch das Intervall $1-l$ für die Punkte der Menge S zur Verfügung. Setzen wir nun

$$l_1 + l_2 = l'(1-l);\ l' < 1,$$

so bleibt für die Punkte von S jetzt nur noch das Intervall

$$1-l-l'(1-l) = (1-l)(1-l')$$

zur Verfügung. Von ihm werden die Strecken l_{ik} ausgeschieden; setzen wir

$$l_{11}+l_{12}+l_{21}+l_{22} = l''(1-l)(1-l');\ l'' < 1,$$

so bleibt von der Gesammtstrecke nur noch das Intervall

$$(1-l)(1-l')(1-l'')$$

zur Verfügung u. s. w.; und daraus folgt nun sofort:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die perfecte Menge S den Inhalt Null besitzt, besteht darin, daß das Product

$$(1-l)(1-l')(1-l'')\ldots.$$

gegen Null convergirt.

---

1) Vgl. die Anmerkung auf S. 172. Für das genauere verweise ich wieder auf meinen demnächst erscheinenden Bericht über Mengenlehre im Jahrb. d. deutsch. Math. Vereing. Bd. 7.

Die oben gegebene Analyse einer punktweise unstetigen Function führt auch zu einer Bestimmung der Mächtigkeit der Stetigkeitspunkte; es besteht nämlich der Satz:

Die Stetigkeitspunkte einer punktweise unstetigen Function besitzen die Mächtigkeit c des Continuums.

Ist nämlich K_0 die Menge der Unstetigkeitspunkte $\omega \geqq \aleph_0$, so sei δ irgend ein Intervall, das von Punkten dieser Menge frei ist. Beim Uebergang von K_0 zu K_1 bleibt entweder δ selbst von Punkten der Menge K_1 frei, oder es zerfällt in eine endliche oder gar unendliche Menge von Teilintervallen dieser Art. Geht man von K_1 zu K_2, K_3 ... über, so tritt dieses Zerfallen entweder nur in endlicher Zahl ein, oder aber der Proceß des Zerfallens wiederholt sich unendlich oft. Im ersten Fall giebt es innerhalb δ ganze Intervalle, deren sämmtliche Punkte Stetigkeitspunkte sind, und der Satz ist erwiesen. Im zweiten Fall verfahren wir so: Zerfällt ein Intervall, so zerfällt es in mindestens zwei Teile; giebt es deren mehr, so wählen wir unter ihnen zwei beliebige aus, die wir in's Auge fassen. Aus δ entstehen so die Intervalle δ_0 und δ_1, aus δ_0 und δ_1 resp. die Intervalle δ_{00}, δ_{01}, δ_{10}, δ_{11}, aus ihnen die acht Intervalle δ_{ni} u. s. w. Jedes so entstehende Intervall erhält daher einen Index, der durch eine Zahlfolge

$$a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \quad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

dargestellt wird, und bestimmt in der Grenze mindestens einen Stetigkeitspunkt [1]). Dieser Stetigkeitspunkt kann daher dem unendlichen Dyalbruch

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots. \quad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

zugeordnet werden, wobei sogar den Brüchen, die doppelt geschrieben werden können, zwei Stetigkeitspunkte entsprechen. Damit ist der Satz bewiesen.

Ich füge hierzu noch folgenden leicht beweisbaren, und wie mir scheint, nützlichen Satz:

Bilden für eine punktweise unstetige Function die Punkte, an denen sie einen constanten Wert besitzt, eine überall dichte Menge Q, so gehören die Stetigkeitspunkte der Function sämmtlich der Menge Q an.

Jeder Punkt gehört nämlich zur Menge Q, oder nicht. Ist x ein Punkt, der nicht zu Q gehört, so muß sein Functionswert

1) Es kann sogar auch eine Stetigkeitsstrecke bestimmen, vgl. oben S. 173.

von dem Wert, der den Stellen von Q entspricht, verschieden sein, und es kann daher x kein Stetigkeitspunkt sein. Damit ist der Satz bewiesen. Es folgt aus ihm, daß die Menge Q die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen muß, damit eine an allen Stellen von Q constante Function punktweise unstetig sein kann. Man kann z. B. keine punktweise unstetige Function bilden, die nur an den rationalen Stellen einen constanten Wert hat [1]).

Weitergehende Schlüsse lassen sich nicht machen, da ja die Mengen K Grenzpunkte besitzen können, die der Menge Q angehören. Man kann z. B. vorschreiben, daß die Function an den Stellen einer nirgends dichten unendlichen Menge Q_1 einen ebenfalls constanten Wert besitzt; dann sind alle Punkte von Q_1, sowie deren Grenzpunkte Unstetigkeitspunkte; diese Grenzpunkte aber sind Punkte von Q.

Functionen, für die die einzelnen Mengen K_ν aus unendlich vielen Punkten bestehen, sind bisher nur in geringem Maaße aufgestellt worden [2]). Ich möchte daher zum Schluß dieser Note ein Beispiel einer Function aufstellen, das in dieser Hinsicht das äußerste leistet, was möglich ist. Ich werde nämlich eine Function angeben von folgender Eigenschaft.

1) Für jeden Wert $0 < \xi \leqq 1$ giebt es eine Menge G_ξ, in deren Punkten der Unstetigkeitsgrad ω genau den Wert ξ hat; die Gesammtheit dieser Mengen G_ξ hat also die Mächtigkeit des Continuums;

2) jede Menge G_ξ besitzt selbst die Mächtigkeit des Continuums; und

3) die Function ist längs unendlich vieler überall dicht verteilter Intervalle constant, so daß selbst die Gesammtheit der Punkte aller Mengen G_ξ nur eine nirgends dichte Menge bildet.

Dies kann folgendermaßen geschehen. Aus dem Intervall $0 \ldots 1$ greife ich alle Punkte heraus, die als Decimalbrüche geschrieben nur die Ziffern 0 und 1 enthalten [3]), und zwar mit Aus-

---

1) Vgl. hierzu auch Volterra, Giorn. d. Mat. Bd. 19, S. 76.

2) Ein Beispiel einer solchen Function giebt Herr Brodén in Ann. 51, S. 314.

3) Die obige Construction der Mengen G_ξ deckt sich der Sache nach mit derjenigen, die ich in diesen Nachrichten, 1896, Heft 4 veröffentlicht habe. Ich füge hinzu, daß Mengen der Form $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ für alle $a_i = 0$ oder 1, sowie andere durch Zifferngesetze definirte Mengen von der Mächtigkeit des Continuums schon vorher von Herrn Cantor construirt und benutzt worden sind (z. B. Ann. 21, S. 590); meine eigene Leistung reducirt sich darauf, für den Nachweis, daß diese Mengen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ besitzen, die einfache Formulirung

schluß derer, in denen von einer bestimmten Stelle an nur Nullen auftreten. Diese bilden eine nirgends dichte Menge G_0 der Mächtigkeit c; einer ihrer Punkte sei

$$x_0 = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots\ .\quad a_i = 0 \text{ oder } 1.$$

Nun sei

$$\xi = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots\ .\quad b_i = 0 \text{ oder } 1$$

irgend ein analoger Bruch, so bilde man

$$x_\xi = x_0 + 2\xi = 0,\ c_1 c_2 c_3 \ldots\ .$$

so dass

$$c_i = a_i + 2b_i$$

ist, und bezeichne die mittelst eines festen ξ aus allen Punkten von G_0 abgeleiteten Punkte x_ξ durch G_ξ, so sind die Punkte von G_ξ unter sich und von den Punkten von G_0 verschieden. Das gleiche gilt aber auch für irgend zwei Mengen G_ξ und G'_ξ. Nämlich die Zahlen

$$0,\ c_1 c_2 c_3 \ldots\ . \quad \text{und} \quad 0,\ c'_1 c'_2 c'_3 \ldots\ .$$

sind dann und nur dann gleich, falls $c_i = c'_i$ ist, d. h.

$$a_i + 2b_i = a'_i + 2b'_i,$$

woraus wieder notwendig $a_i = a'_i$ und $b_i = b'_i$ folgt. Da nun die Werte ξ die Mächtigkeit c besitzen, so gilt dies auch von den Mengen G_ξ; andrerseits ist auch klar, daß diese Mengen die Strecke 0..1 immer noch nirgends dicht erfüllen, da sie nur Decimalbrüche mit den Ziffern 0 1 2 3 darstellen.

Lesen wir jetzt den Decimalbruch für ξ dyadisch, so wird dadurch, der obigen Festsetzung gemäß, jeder Wert zwischen 0 und 1 — Null ausgenommen — genau einmal dargestellt; ich will diesen Wert mit (ξ) bezeichnen. Bestimmt man nun eine Function $f(x)$ so, daß

$$f(x_\xi) = (\xi),\ \ f(x_0) = 0$$

ist, während $f(x)$ an allen andern Stellen ebenfalls den Wert Null hat, so stellt G_ξ eine Menge vom Unstetigkeitsgrad $\omega = (\xi)$ dar, während $f(x)$ in jedem innern Punkt eines Intervalls, das von den Punkten aller G_ξ frei ist, constant ist, und den Wert Null besitzt.

Man kann versuchen, die Function so abzuändern, daß die Stetigkeitspunkte kein auch noch so kleines Intervall ganz er-

---

zu benutzen, daß man jeden der obigen Decimalbrüche auch dyadisch lesen kann, und umgekehrt.

füllen. Der Versuch, dies etwa so zu erreichen, daß man statt des dekadischen Zahlsystems ein solches mit der Basis 4 benutzt, schlägt jedoch fehl. Dagegen führt folgendes Verfahren zum Ziel.

In einem Zahlsystem mit der Basis 3 sei wieder eine Menge G_0 definirt durch die Punkte

$$x_0 = 0,\ a_1 a_2 a_3 \ldots\ldots \quad a_i = 0 \text{ oder } 1$$

mit Ausschluß derer, die von einer Stelle an lauter Nullen enthalten. Ich bilde nun die Menge G_n, die folgendermaßen definirt ist. Sie enthält alle Punkte, die höchstens an den ersten n Stellen eine Zwei enthalten, doch so daß die $n$te Stelle wirklich eine Zwei ist. Es ist dann G_n von der Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ und nirgends dicht, und es sind auch hier wieder alle Mengen G_n ohne gemeinsame Punkte. Es bleiben jetzt noch diejenigen Punkte, in denen die Zwei unendlich oft auftritt; sie zerfällen wir noch in zwei Mengen G' und G, und zwar soll G alle diejenigen enthalten, in denen von einer bestimmten Stelle an nur Zweien vorkommen. Jeden dieser Punkte von G kann man auch so schreiben, daß er von einer bestimmten Stelle an lauter Nullen enthält; er enthält alsdann nur eine endliche Anzahl von Zweien und kann nun einer Menge G_ν hinzugefügt werden. Ist G'_ν die so vermehrte Menge, so haben wir damit die Mengen

$$G_0,\ G'_1,\ G'_2,\ \ldots.\ G'_\nu,\ \ldots\ldots\ G'$$

construirt, und es ist leicht ersichtlich, daß jetzt G' eine überall dichte, aber nirgends zusammenhängende Menge ist [1]). Die Punkte von G'_ν seien x'_ν.

Wird nun wieder eine Reihe gegen Null convergirender Größen

$$g_0 > g_1 > g_2 \ldots\ldots$$

angenommen, und

$$f(x'_\nu) = g_\nu$$

gesetzt, dagegen $f(x') = 0$ für alle Punkte von G', so ist $f(x)$ eine Function der verlangten Beschaffenheit und ist an allen Punkten der Menge G' stetig.

---

1) Eine Function dieser Art, in der die Stetigkeitspunkte, sowie die Unstetigkeitspunkte nicht abzählbar sind und zugleich in jedem Intervall überall dicht liegen, hat Herr Brodén a. a. O. zu construiren versucht. Doch ist dieser Versuch als verfehlt zu bezeichnen. Denn die von ihm construirten Mengen von Unstetigkeitspunkten sind zwar nicht abzählbar, aber sie liegen gegen seine Behauptung nirgends dicht.

Königsberg, Juni 1899.

Seismometrische Beobachtungen im Göttinger Geophysikalischen Institut.

Von

E. Wiechert.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 22 Juli 1899.

Vorwort.

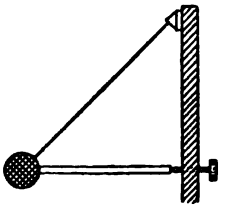
Im vorigen Jahre habe ich für das Göttinger Geophysikalische Institut durch die hiesige Werkstätte für Präcisionsmechanik von G. Bartels ein photographisch registrirendes Erdbebenpendel herstellen lassen, daß seit dem 24. Februar dieses Jahres unter der sorgfältigen Wartung des Herrn Assistenten W. Schlüter in dauernder Thätigkeit ist. Im Folgenden soll eine kurze Beschreibung des Instrumentes und eine Uebersicht über die bisherigen Erfahrungen gegeben werden.

§ 1. Pendel.

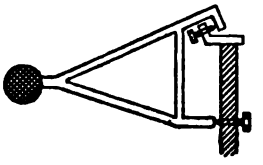
Die schönen Erfolge der italienischen Seismographen haben gezeigt, daß die mechanische Registrirung recht wohl geeignet ist, auch die schwachen Erdbewegungen aufzuzeichnen, auf welche in Göttingen allein zu rechnen ist, ja sie hat hierbei manches geleistet, was die photographische Registrirung bisher schuldig geblieben ist. Immerhin aber muß gefürchtet werden, daß die Reibung eines Schreibstiftes das Diagramm in seinen Einzelheiten entstellt, und ich hielt deßhalb für den Beginn der hiesigen seismometrischen Arbeiten die technisch einfachere photographische Registrirung für zweckmäßiger.

Besonders geeignet für die hiesigen Verhältnisse erschien ein „*Horizontalpendel*“. Dabei war Auswahl zu treffen zwischen dem

„Faden-Spitze-“ und dem *2-Spitzen-System* (Figur 1 und Figur 2), welche beide große Erfolge aufzuweisen haben.



Figur 1.



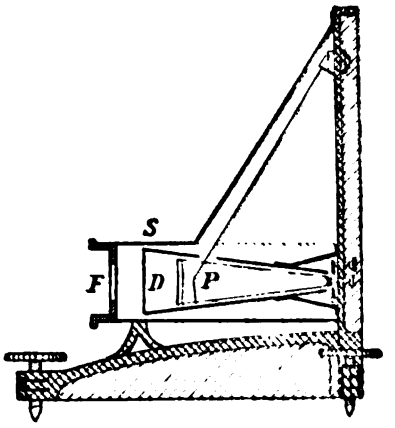
Figur 2.

Das 2-Spitzen-Pendel hat den Vorzug der kompendiöseren Form, dafür aber den schwer wiegenden Nachtheil, daß der Pendelrahmen in der Nähe der Drehungsaxe erhebliche Masse erhalten muß, wodurch die Spitzen *bei allen Erschütterungen des Instrumentes auch seitlich stark in Anspruch genommen werden.* Hierzu kommt noch, daß wegen des kurzen Abstandes der Spitzen ihre Belastung verhältnißmäßig groß ist und jede Veränderung ihrer Form auf Stellung und Empfindlichkeit des Pendels einen bedeutenden Einfluß ausübt. Da nun in meinem Falle das Pendel nicht weit von einer belebten Straße aufgestellt werden mußte, glaubte ich dem Faden-Spitze-Pendel den Vorzug geben zu müssen.

Bei dem nach diesen Erwägungen hergestellten Apparat bildet das Pendel, *P* in Figur 3, einen 20 cm langen Trichter aus feiner Kupferfolie, der am weiten Ende einen 5 cm großen, runden Hohlspiegel von Glas und am anderen ein nur schwach gewölbtes Achathütchen trägt. Indem so alle Masse möglichst an das äußere Ende verlegt ist, wird die Wirkung seitlicher Erschütterungen auf die Auflage möglichst herabgesetzt. Die Stahlspitze, gegen welche sich das Achathütchen legt, ist sorgfältig abgerundet und einigermaaßen, aber durchaus nicht besonders fein; auf diese Weise wird eine Beschädigung von Spitze und Hütchen vermieden und die Empfindlichkeit dennoch nicht geschädigt. — Eine sehr einfache, in der Figur angedeutete Arretirung ermöglicht es, das Pendel von der Spitze abzuheben.

Als bedeutender Uebelstand bei Erdbebenpendeln erscheinen in der Regel die *Eigenschwingungen des Instrumentes*, welche sich über die aufzuzeichnenden Bewegungen lagern und so das Bild in unerfreulicher Weise verwirren. Um dem zu entgehen, habe ich für eine *starke Luftdämpfung* Sorge getragen. Es ist für diesen Zweck am Statif ein Messingcylinder *D* befestigt, welcher das Pendel mit

einigen Millimetern Spielraum umgiebt und die Amplitude seiner Eigenschwingungen in 20 Sekunden auf ca. $^1/_{16}$ reducirt. — Pendel, Dämpfer und Faden werden zum Schutze gegen Luftströmungen von einer Blechhülse *S* umschlossen, die bei *F* ein Glasfenster trägt. Ueberdies ist der ganze Apparat durch einen Holzkasten überdeckt, der vor *F* eine Oeffnung hat.



Figur 3.

§ 2. Registrirung.

Gegenüber der mechanischen Registrirung hat die photographische in den gebräuchlichen Ausführungen den Nachtheil, daß die Kurven nicht fein genug und die Geschwindigkeit nicht groß genug ist, um die Bewegung der Erde in ihre Schwingungen aufzulösen; man begnügt sich im Allgemeinen damit, festzustellen, ob eine Bewegung überhaupt vorhanden ist oder nicht, und wie die Amplitude wechselt. Um hier mit geringen Kosten zu einem günstigeren Resultat zu kommen, bemühte ich mich, das optische System möglichst vollkommen zu gestalten und Geschwindigkeiten anwendbar zu machen, welche der mechanischen Registrirung entsprechen. —

Wie gewöhnlich wird Spalt, Hohlspiegel und Cylinderlinse verwendet; sie sind in Figur 4 mit *S*, *H*, *C* bezeichnet. Der Spalt

Figur 4.

befindet sich etwas über und — aus zufälligen Gründen — etwas vor der Walze *W*, die das photographische Papier trägt. Der Hohlspiegel hat ca. 1 m Brennweite und 50 mm Durchmesser; die Rückseite des $2^1/_2$ mm dicken Glases ist versilbert. Die Cylinderlinse, welche ebenso wie der Hohlspiegel von der Firma Reinfelder und Hertel, München, bezogen worden ist, hat 30 mm Brennweite, 11 mm Breite und 60 mm Länge.

Der Hohlspiegel H entwirft auf dem Papier der Walze W ein Bild, das durch die Cylinderlinse C zu einem Punkt verkürzt wird. Bei der gewöhnlichen Anordnung geschieht dieses, indem C für die Höhenrichtung ein Bild von H entwirft. Bei den von mir gestellten Anforderungen hätte sich so eine unzureichende Verkürzung ergeben. Ich setzte darum zwischen C und H eine Blende B in Form eines horizontalen Spaltes und brachte C in die zugehörige Stellung. Ueberdies erhielt C die angegebene verhältnißmäßig sehr kurze Brennweite. Bedeutet o die Breite der Oeffnung in B, h die Höhenausdehnung des Bildes auf der Walze, b den Abstand $B-C$, w den Abstand $W-C$, so folgt

$$h : o = w : b.$$

Im vorliegenden Falle ist w = ca. 30 mm, b = ca. 1700 mm, und ich verlangte $h = {}^1/_{10}$ mm, so mußte denn die Oeffnung in B nur 6 mm breit genommen werden. Bei dem großen Durchmesser von H erhält man trotz dieser starken Abblendung eine völlig hinreichende Lichtintensität.

Als Lichtquelle dient eine kleine flachbrennende Gasflamme in etwa 80 cm Entfernung hinter dem Spalt, deren Strahlen durch eine zwischengeschaltete Linse (Brillenglas) zu einem absichtlich unscharf gehaltenen Bilde auf den Spalt koncentrirt wird.

Diese Einrichtung ergiebt bei den fertigen Photogrammen je nach der Regulirung der Flamme Kurven von ${}^1/_{20}$—${}^1/_3$ mm Dicke. Wir verlangen jetzt, daß ${}^1/_{10}$ mm nicht erheblich überschritten wird und halten ${}^1/_5$ mm als nicht mehr ordnungsmäßig.

Das für einen Tag nothwendige photographische Papier (Dr. Stolze & Co., Charlottenburg) ist in einem 13 cm breiten und 40 cm langen Streifen auf der Messingwalze W aufgespannt, deren Umfang ca. $36{}^1/_2$ cm beträgt. Die überschüssigen Enden gehen durch einen ca. 1 mm breiten Spalt nach innen und werden durch Federn kräftig angespannt. Wie man sieht, wird der ganze Umfang der Walze bis auf eine kleine, praktisch unwesentliche Lücke von empfindlichem Papier überdeckt; indem nun die Walze durch den Zeiger einer Uhr in 1 Stunde einmal herumgedreht und zugleich um ca. 3 mm seitlich verschoben wird, erhält man zunächst eine Spirallinie und auf dem abgenommenen Papier eine Reihe von Parallellinien. Jede von diesen entspricht bei $36{}^1/_2$ cm Länge einer Stunde, sodaß 1 Minute durch etwa 6 mm und 1 Sekunde durch etwa ${}^1/_{10}$ mm dargestellt wird. Die so erreichte Geschwindigkeit ist 18—36 mal größer als bei v. Rebeur-Paschwitz, 6 mal größer als bei den Milne'schen Seismographen, noch etwa 3 mal größer

als bei den neuerdings von Ehlert konstruirten schnell registrirenden Apparaten und liegt nicht mehr weit unter den in Italien bei mechanischer Registrirung benutzten Geschwindigkeiten von 60—120 cm in 1 Stunde. Nach meinen bisherigen Erfahrungen ist zu schließen, daß ich mich bei der benutzten Schärfe der Kurven etwa an der unteren Grenze der brauchbaren Geschwindigkeiten befinde, denn die Vorläufer der größeren Erdbeben werden gerade noch aufgelöst. Eine Vergrößerung auf das Doppelte könnte in Erwägung gezogen werden und würde ohne Weiteres noch hinreichend kräftige Lichtwirkung ergeben.

§ 3. Empfindlichkeit des Pendels.

Hängt man das Pendel an einem horizontal gespannten Faden vertikal so auf, daß es um eine horizontale, durch die Höhlung des Achathütchens gehende Axe schwingt, so ergiebt sich eine Periode (doppelte Schwingungsdauer) von

$$\tau = {}^6/_7 \text{ Sekunden.}$$

Hieraus folgt, daß der Schwingungspunkt um

$$l = \frac{g}{4\pi^2}\tau^2 = 18^1/_4 \text{ Centimeter}$$

von der Anlagestelle der Spitze entfernt ist. —

Läge der Spalt S in der Vertikalebene durch den Lichtpunkt auf der Walze, so würden die Ausweichungen des Lichtpunktes so erfolgen, als hätte das Pendel einen Zeiger von der doppelten Entfernung zwischen Spitze und Papier. Da S im vorliegenden Falle etwas vorgerückt ist, so vergrößert sich die Zeigerlänge und zwar um $s \cdot \frac{p}{a}$, wenn s den Abstand des Spaltes von der Vertikalebene durch den Lichtpunkt, p die Länge des Pendels, gerechnet vom Achathütchen bis Hohlspiegel, a den Abstand des Spaltes von dem Hohlspiegel bedeutet. Ist also noch A der Abstand zwischen Papier und Spitze, so wird die äquivalente Zeigerlänge

$$s = 2A + s\frac{p}{a}.$$

Im vorliegenden Fall ist $2A = 460$ cm, $s = 30$ cm, $p = 20$ cm, $a = 180$ cm, also

$$s = 463 \text{ cm.}$$

Da der Abstand des Schwingungspunktes von der Spitze $18^1/_4$ cm beträgt, so folgt, daß schnelle Horizontalverschiebungen des Apparates, bei denen der Schwingungspunkt als ruhend betrachtet werden darf,

$$\frac{\varepsilon}{l} = \frac{463}{18^1/_4} = \text{ca. } 25 \text{ mal}$$

vergrößert werden.

Eine Bogensekunde Drehung der Pendelebene giebt einen Ausschlag von $\varepsilon . 0{,}485 \cdot 10^{-5}$, eine Bogensekunde Neigung des ganzen Apparates demgemäß einen Ausschlag von

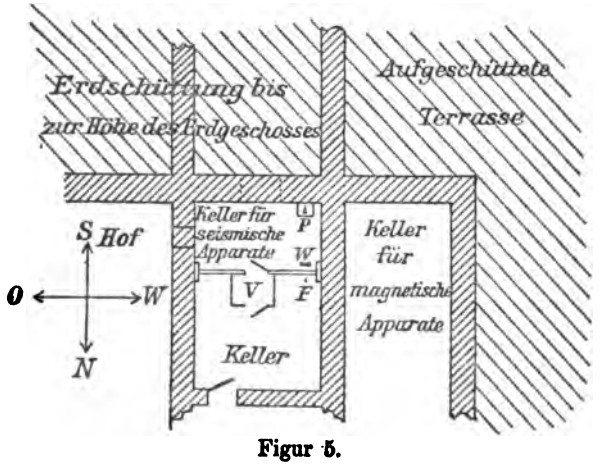
$$E = \left(\frac{\varepsilon \cdot 0{,}485 \cdot 10^5}{\tau^2}\right) \cdot T^2,$$

wenn T die Periode des Pendels im Apparat bedeutet und τ wie vorhin definirt ist. E kann als „Empfindlichkeit" bezeichnet werden. Für $\varepsilon = 4630$ Millimeter, $\tau = {}^6/_7$ Sekunden ergiebt sich zu

$$T = 2 \times 10 \text{ Sekunden } E = 12 \text{ Millimeter.}$$

§ 4. Aufstellung.

Das Pendel ist in einem 270 cm breiten von Ost nach West gerichteten überwölbten Kellerraum der Sternwarte aufgestellt. Die südliche Längswand wird durch eine der schweren, hier unten ca. 1 m dicken Mauern der Sternwarte gebildet; die nördliche Längswand besteht aus einem Gewölbebogen, dessen freie Fläche durch eine beiderseits mit Kalk verputzte Bretterwand von im Ganzen 10 cm Dicke ausgefüllt wird. Diese Wand enthält die Eingangsthüre, vor der außen zum Schutz gegen Wärmeänderungen,



Figur 5.

Luftströmungen, Licht und Staub ein hölzerner Vorbau errichtet worden ist.

Von dem Bau eines besonderen Pfeilers mußte aus verschiedenen Gründen Abstand genommen werden. So wurde das Pendel auf einer in der südlichen Wand zur Hälfte eingemauerten Sandsteinplatte von 80 cm Länge, 40 cm Breite und 20 cm Dicke mit seiner Längsrichtung von Süd nach Nord aufgestellt. Die gegenüber liegende Bretterwand trägt den Registrirapparat; die Flamme befindet sich jenseits der Wand im Nebenkeller, sodaß jede schädliche Erwärmung oder Unruhe der Luft im Pendelraum vermieden wird. —

Bemerkt mag noch werden, daß an der Wand hinter dem Pendel nicht andere Kellerräume angrenzen, sondern bis zum Fußboden des Erdgeschosses Erde aufgeschüttet ist.

§ 5. Betrieb des Pendelapparates.

Das photographische Papier muß, wie schon mitgetheilt, jeden Tag erneuert werden; doch ist man nicht an eine bestimmte Zeit gebunden, sondern kann an jedem Tag irgend eine Stunde des Nachmittags wählen, da ein einzelnes Blatt für mehr als 30 Stunden ausreicht. Das Auswechseln verursacht eine Lücke von etwa 5 Minuten; diese wurde bisher zwar noch niemals schädlich, aber es wäre immerhin besser, eine zweite Walze zur Verfügung zu haben, wodurch der Zeitverlust auf wenige Sekunden beschränkt werden könnte.

Gleich nach dem Einspannen des Papieres und vor dem Abnehmen werden unter Beziehung auf ein Chronometer von Knoblich durch zweimaliges kurz aufeinander folgendes Abblenden Zeitmarken gegeben. Das Chronometer seinerseits wird mindestens alle 14 Tage auf der hiesigen Königlichen Sternwarte kontrollirt. Für die so gewährte wichtige Unterstützung sage ich dem Direktor der Sternwarte, Herrn Professor Dr. Schur auch an dieser Stelle meinen wärmsten Dank.

Die Unsicherheit der schließlich durch die Diagramme gewonnenen Zeitangaben ist auf einige Sekunden, im äußersten Falle etwa ± 10 Sekunden zu schätzen; sie wird nach Einführung der geplanten automatischen Zeichengebung ganz bedeutend kleiner werden.

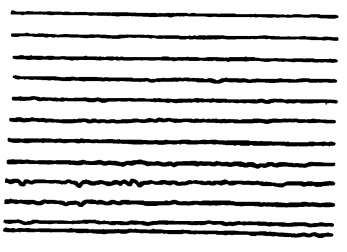
Die Diagramme werden in der Regel einmal wöchentlich entwickelt.

Zum Schluß mögen noch einige Angaben über die Betriebskosten folgen. Ein einzelnes Blatt kostet 25 Pf., die Entwicklung von 7 Blättern ca 20 Pf., eine Mappe, in welcher die Blätter von 2 Monaten durch Einkleben zu einem handlichen Buch vereinigt werden, 75 Pf., der Gasverbrauch beträgt etwa 1 cbm pro Tag; so belaufen sich die gesammten sächlichen Ausgaben für 1 Jahr auf ca. 170 Mark. Für ein Doppelpendel, welches die horizontale Komponente der Erdbeben vollständig geben würde, müßte bei Benutzung derselben Flamme für beide Pendel jährlich ca. 280 Mk. aufgewendet werden.

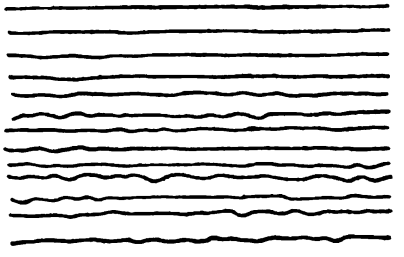
§ 6. Störungsursachen und Störungen.

Der Betrieb der Sternwarte (Schließen und Oeffnen der Klappen etc.) ist ohne merklichen Einfluß auf das Pendel. Der Verkehr der Menschen im Hause kommt nur für den unmittelbar über dem Pendelkeller liegenden Raum und vor allem für den Durchgang durch die Thüre in der Wand oberhalb und etwas östlich von dem Pendel in Betracht. Tritt ein Mensch hier auf die Schwelle, so giebt das Pendel bei gewöhnlicher Empfindlichkeit (ca. 12 mm für 1 Bogensekunde) einen Ausschlag von $^1/_9$—$^1/_6$ mm, bei hoher Empfindlichkeit (36 mm für 1 Bogensekunde) $^1/_3$—$^1/_2$ mm. Die Wirkung ist also zwar merklich, aber so klein, daß sie nur ganz ausnahmsweise störend werden könnte. — Der Straßenverkehr auf der „Geismar-Chaussee", deren Mittellinie etwa 40 m von dem Pendel vorüberführt, hat keinen merklichen Einfluß; selbst sehr schwere oder sehr schnell fahrende Wagen hinterlassen keine nachweisbare Spuren.

Von Bedeutung sind nur 2 Ursachen: *Erschütterungen des Gebäudes durch Wind und Schwankungen der Außentemperatur.* — Schon



Figur 6.

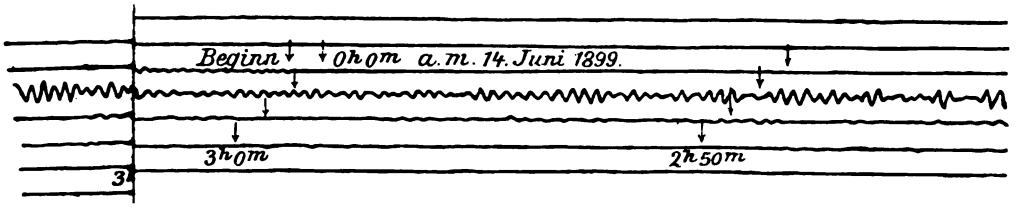


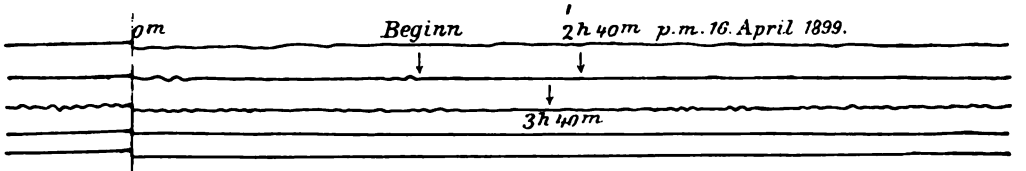
Figur 7.

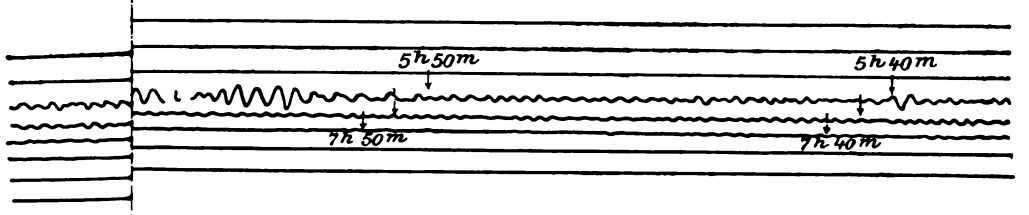
Erdbebendiagramme.

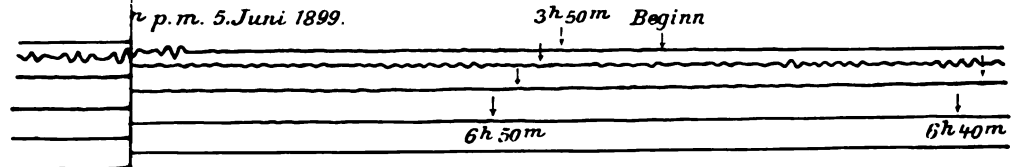
bildungen sollen nur eine allgemeine Uebersicht geben. Treue in den Einzelheiten icht bieten, da sie durch Zinkdruck unter Zwischenschaltung einer Handpause her- en. —

9 ist recht gut gelungen. — In Figur 10 sind die Zacken zu derb und nicht dicht nder. — Die Figuren 11—14 geben zwar die Hauptbewegungen befriedigend wieder, n den Vorläufern viele feine Zacken vermissen und sind in den Ausläufern bei Weitem lmäßig wie die Originalphotogramme; hier muß man sich wieder- und wiederkehrende cher werdende Wellenzüge von ca. $1^1/_2$ mm Wellenlänge denken.









§ 7. Erdbebendiagramme.

Da die zur Verfügung stehenden Geldmittel nur die Aufstellung eines einfachen Pendels erlaubten, mußte ich mich darauf beschränken, eine einzige Komponente der Erdbewegungen zu registriren. Mit Rücksicht auf die häufig zu erwartenden, gut beobachteten Erdbeben in Japan wählte ich die Ost-West-Komponente; leider ergiebt sich so für die nicht minder häufigen und gut beobachteten italienischen Erdbeben eine sehr kleine, wenn überhaupt merkliche Komponente.

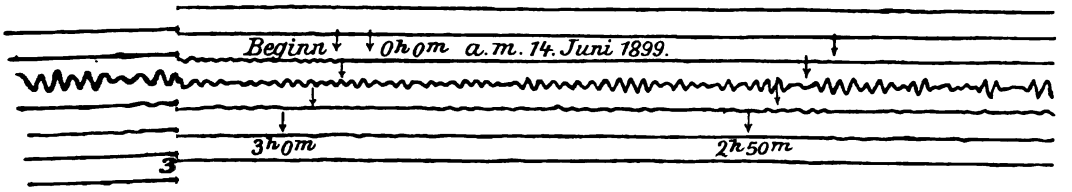
In der bisherigen Betriebszeit von ca. 5 Monaten wurden im Ganzen 6 Diagramme von Erdbeben mit verhältnißmäßig nahem Centrum und 45 Diagramme von Erdbeben mit sehr fernem Centrum sicher beobachtet.

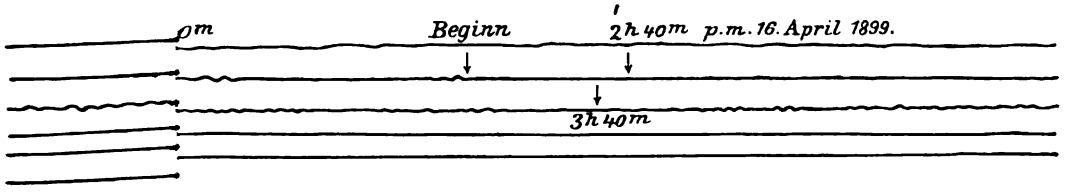
Das kräftigste Diagramm eines Erdbeben mit nahem Centrum ist in Figur 9 auf der beigefügten Tafel wiedergegeben. Es zeigt Vorläufer, die ca. 2,3 Minuten umfassen, dann größere, allmählig abnehmende Schwingungen, die etwa 16 Minuten lang merklich bleiben. — Für die hohe Empfindlichkeit des Pendels spricht, daß ein Erdbeben, dessen Centrum in Oberitalien, im Toskanisch-Modenensischen Gebiet der Appeninen lag, sich noch bemerkbar machte, obgleich der Radiusvektor vom Centrum mit der Pendelebene nur etwa einen Winkel von 6^0 bildete, sodaß nur etwa $^1/_{10}$ des vollen Betrages der Erdbewegungen zur Geltung kam. In der Pendelkure (Figur 10) sieht man freilich nur eine zarte Kräuselung (Schwingungsperiode ca. 6 Sekunden), die aber doch genügte, um Herrn Schlüter und mir das Erdbeben anzuzeigen noch bevor wir Nachrichten aus Italien erhalten hatten. Die ganze Schwingungsweite in den Diagrammen ist höchstens etwa $^1/_5$ mm; nehmen wir Horizontalverschiebungen der Erdoberfläche an, so müßte deren Schwingungsweite senkrecht zur Pendelebene hiernach ca. $1/(5 \times 25)$ $= {}^1/_{125}$ mm und in der Richtung des Radiusvektor ca. $^{10}/_{125} = {}^1/_{12}$ mm betragen haben.

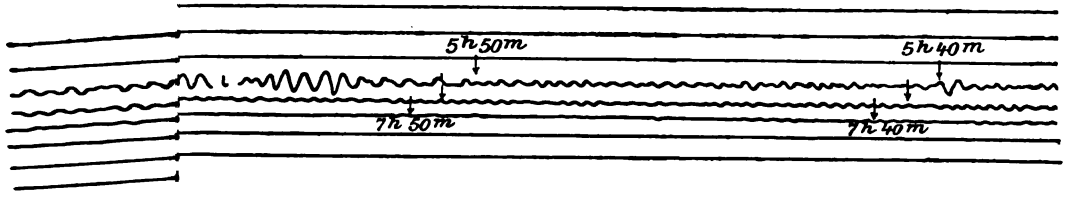
Das stärkste beobachtete Erdbeben mit sehr fernem Centrum ist in Figur 11 abgebildet. Die Schwingungen sind etwa 3 Stunden lang merklich, dann werden sie so schwach, daß eine Unterscheidung von den etwas vorhandenen Windstörungen unmöglich wird. Zunächst zeigt sich ein etwa 30 Minuten umfassender Bereich unregelmäßig scheinender Schwingungen, der „*Vorläufer*“, dann folgen Wellenzüge von viel regelmäßigerem Aussehen und langer Periode, die „*Hauptwellen*“. Die Vorläufer zeigen außer im Anfang noch einen vollständig scharfen und in der Form sehr charakteristischen

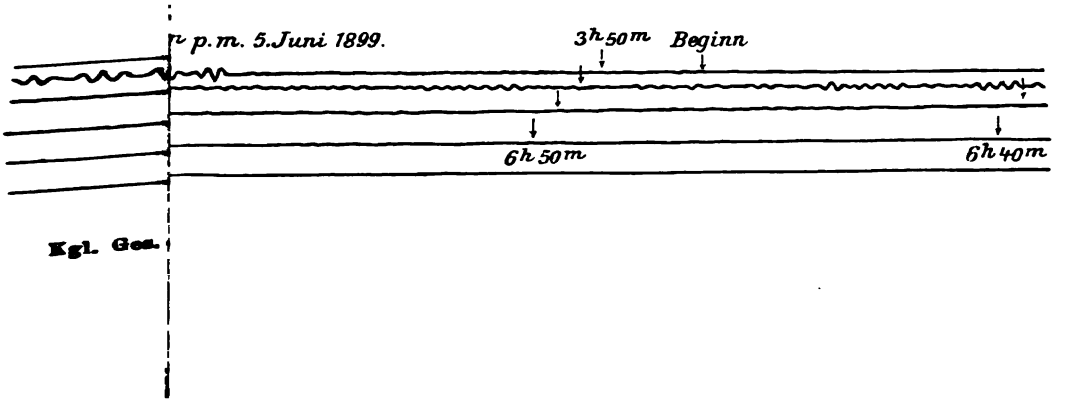
Erdbebendiagramme.

›bildungen sollen nur eine allgemeine Uebersicht geben. Treue in den Einzelheiten
icht bieten, da sie durch Zinkdruck unter Zwischenschaltung einer Handpause her-
en. —
9 ist recht gut gelungen. — In Figur 10 sind die Zacken zu derb und nicht dicht
nder. — Die Figuren 11—14 geben zwar die Hauptbewegungen befriedigend wieder,
n den Vorläufern viele feine Zacken vermissen und sind in den Ausläufern bei Weitem
lmäßig wie die Originalphotogramme; hier muß man sich wieder- und wiederkehrende
›her werdende Wellenzüge von ca. $1^1/_2$ mm Wellenlänge denken.









Kgl. Ges.

Einsatz, der Erschütterungen mit erheblich größerer Amplitude einleitet. Anfänglich herrschen Schwingungen mit einer Periode von etwa 10 Sekunden vor, neben denen Schwingungen mit erheblich kleinerer Periode eben noch merklich sind. Später fallen die letzteren ganz weg und es treten Wellen mit etwa doppelter, also ca. 20 Sekunden langer Periode hinzu, die in den Hauptwellen allein übrig bleiben. In diesen Hauptwellen nimmt die Schwingungsperiode allmählig etwas ab, von ca. 20, auf ca. 15 Sekunden; die Schwingungsweite variirt dabei dauernd in sehr bemerkenswerther Weise, sodaß man den Eindruck von Interferenzen gewinnt.

Die Periode der Eigenschwingungen des Pendels beträgt bei der hier benutzten gewöhnlichen Empfindlichkeit ca. 20 Sekunden, entspricht also etwa den Erdbewegungen bei den Hauptwellen. Infolgedessen zeichnet das Pendel trotz seiner starken Dämpfung (Verhältniß für zwei aufeinander folgende Ausweichungen nach verschiedenen Seiten 4:1) die seiner Periode nahe kommenden Schwingungen um etwa die Hälfte vergrößert auf. Aehnliches tritt auch bei anderen Erdbeben vielfach ein, ist sehr wenig angenehm, läßt sich aber vorläufig nicht vermeiden, da die höheren Empfindlichkeiten, welche erheblich größeren Schwingungsperioden des Pendels entsprechen, nach den Auseinandersetzungen des § 6 für den regelmäßigen Betrieb ungeeignet sind. — Daß der Charakter des Bildes durch den Einfluß der Eigenschwingungen des Pendels Dank der starken Dämpfung (4:1) jedenfalls nicht erheblich geändert wird, ist unmittelbar einleuchtend und wird auch durch Figur 11 gezeigt, die das Diagramm des stärksten Erdbebens darstellt, daß bei einer Schwingungsperiode von etwa 40 Sekunden (Dämpfungsverhältniß 16:1) gewonnen wurde.

Ebenso wie in den Fällen Figur 11 und 12 beginnen alle Fernerdbeben mit unregelmäßig scheinenden Schwingungen, den „Vorläufern", in welchen sich neben längeren die kürzesten Perioden des Erdbebens (4—5 Sekunden) bemerkbar machen. Nach einiger Zeit gestaltet sich das Bild sehr viel regelmäßiger, indem Wellen von längster Periode (20—40 Sekunden), die „Hauptwellen", zur Vorherrschaft und bald auch zur Alleinherrschaft gelangen. —

Die größten Amplituden des Erdbebens finden wir in den Hauptwellen, doch ist ihr Uebergewicht in dieser Hinsicht keineswegs besonders groß. — Die Intensität der Hauptwellen nimmt bald ab, bald zu, scheint aber im Großen und Ganzen — d. h. von den Schwankungen abgesehen — schnell zu einem Maximum anzuwachsen, um dann allmählig immer weiter abzunehmen und schließlich unmerklich

zu werden. Die Periode der Hauptwellen ist anfänglich am größten und nimmt allmählig ab (z. B. von 30 auf 15 Sekunden).

Ebenso wie in Figur 11 zeigen die Vorläufer in sehr vielen Fällen nach einiger Zeit einen neuen scharf ausgeprägten Einsatz, meist mit starker und charakteristischer Bewegung, der größere Unruhe einleitet.

Die Erdbeben treten bekanntlich oft in Gruppen auf; *da ist es nun bei den ausführlichen Diagrammen manchmal höchst überraschend, zu beobachten, in wie vielen Einzelheiten sich zwei Bilder gleichen, die doch einzeln genommen einen so krausen Eindruck machen.* Das schönste bisher gewonnene Beispiel wird durch die beiden in Figur 13 und 14 dargestellten Erdbeben gegeben, die in $10^1/_2$ Stunden aufeinander folgten und auch an Größe einander nahe gleich waren. Außer auf die vielen Uebereinstimmungen in der Form, möge auf die nahe Uebereinstimmung in der Größe der Zeitintervalle aufmerksam gemacht werden. Rechnen wir vom Beginne ab, so erfolgte der zweite Einsatz, der hier ebenso wie in dem Diagramm Figur 11 auftritt, beim ersten Erdbeben nach $10^m\ 20^s$, beim zweiten nach $10^m\ 17^s$; die regelmäßigen Wellen setzten beim ersten Erdbeben nach etwa 31^m, beim zweiten nach etwa $29^1/_2{}^m$ ein. — Wir müssen offenbar schließen, daß hier an zwei nicht weit voneinander entfernten Stellen (die zweite etwas näher an Göttingen als die erste) durch gleichartige Erschütterungen nahe dieselben Schwingungen ausgelöst wurden.

Je weiter der Beobachtungsort vom Centrum des Erdbebens entfernt ist, um so mehr eilen die Vorläufer voran. Bei den Diagrammen Fig. 11, 13, 14 beträgt die Zeitdifferenz rund 30 Minuten; es ist daher nach Milne[1]) in allen diesen Fällen auf eine Entfernung der Epicentren von Göttingen um rund 80 Bogengrade zu schließen. Bei Figur 12 beträgt die Voreilung nur ca. 16 Minuten, ich möchte aber nach dem Anblick der Kurve vermuthen, daß das erste Stadium der Vorläufer, bis zum zweiten Einsatz, in diesem Falle als zu klein für die Beobachtung fortgefallen ist, sodaß die Entfernung des Epicentrums doch wohl etwa ebenso groß war.

---

1) Report of the Meeting at Bristol, 1898, of the Brittish Association for the advancement of science. London 1899, p. 179; vergl. die Tafel S. 223.

§ 8. Bemerkungen zur praktischen Seismometrie.

Aus den Geschwindigkeitsmessungen wird gefolgert, daß die Vorläufer durch die innere Erde hindurchgehen, die Hauptwellen aber längs der Erdrinde fortlaufen. Diese letztere wird man sich dabei durch eine zähflüssige Schicht gegen den Kern bis zu einem gewissen Grade elastisch isolirt denken müssen.

Wie variirt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwellen in verschiedenen Gebieten der Erde? — Wie kommen die Schwankungen in der Intensität der Hauptwellen zu Stande? Liegt die Ursache nur in der Art ihrer Erregung im Centrum des Erdbebens oder auch in einer unregelmäßigen Fortpflanzung längs der Erdoberfläche, welche „Brechung", „Beugung" und „Reflexion" zur Folge hat?

Was bedeutet der oft vorhandene zweite Einsatz der Vorläufer? — Die Hypothese eines zweiten Stoßes im Erdbebencentrum wird durch die genaue Uebereinstimmung der Zeitintervalle ($10^m\ 20^s$ und $10^m\ 17^s$) zwischen den beiden Einsätzen in den Diagrammen Figur 13 und 14 bedenklich, und noch unwahrscheinlicher, weil der zweite Einsatz deutlich neuartige Wellen einleitet und bei so vielen Erdbeben in ähnlicher Weise auftritt. — Sollen wir daher etwa bei dem ersten Einsatz an longitudinale und beim zweiten Einsatz an transversale Wellen durch den Erdkern denken? — Oder leitet der zweite Einsatz vielleicht diejenigen Wellen ein, welche längs der Erdrinde in den Schichten schnellster Fortpflanzung zu uns kommen?

Um für die Beantwortung dieser und anderer sich an die seismometrischen Beobachtungen anschließenden und für die Physik der Erde außerordentlich wichtigen Fragen, an deren Bearbeitung wir Dank der vielen vortrefflichen Vorarbeiten nun wohl schon gehen können, ein sicheres und zweckmäßiges Material zu schaffen, scheint es sehr wünschenswerth, daß bei den Registrirungen stets Geschwindigkeiten angewandt werden, welche hinreichen, um die Erdbewegungen in die Einzelschwingungen aufzulösen. Durch die vorstehende Arbeit wird bewiesen, daß auch bei Anwendung der Photographie hierzu schon verhältnißmäßig geringe Mittel genügen. —

Stets sollte man darauf Bedacht nehmen, die Eigenschwingungen des Apparates durch möglichst starke Dämpfung herabzusetzen. Geschieht dies nicht, und liegt die Eigenperiode, wie vielfach üblich, in der Nähe von 20 Sekunden, so werden die

zugehörigen Schwingungen des Erdbebens unter Umständen so vielmals vergrößert, daß die gewonnenen Diagramme die Vorstellung großer Stöße erwecken, wo in Wirklichkeit nur verhältnißmäßig kleine regelmäßige Bewegungen stattgefunden haben. —

Da die Geschwindigkeit der Oberflächenwellen auf ungefähr 3 Kilometer in 1 Sekunde geschätzt wird, so müßten Apparate von der Art des beschriebenen schon bei 30 Kilometer Entfernung sehr deutliche Phasenverschiebungen zeigen; *es wäre also selbst auf einem so kleinen Gebiet, wie es z. B. Deutschland für die Erde darstellt, sehr wohl möglich die Fortbewegung der Wellen in Einzelheiten zu beobachten und zu wichtigen Schlüssen über die Beschaffenheit der Erdrinde zu verwerthen.*

Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium zu Göttingen (VIII).

Von

O. Wallach.

Eingegangen am 13. August 1899.

1. Ueber die Oxydation des Pinen.

Wenn man unter den von v. Baeyer angegebenen Bedingungen (Ber. d. chem. Ges. 29, 22) zwecks Gewinnung von α-Pinonsäure Terpentinöl mit Kaliumpermanganat oxydirt, so bemerkt man beim Eindampfen der Oxydationsflüssigkeit das Auftreten eines eigenthümlichen campherartigen Geruchs, der darauf schließen läßt, daß bei der Oxydation ein in Wasser löslicher, flüchtiger Körper entstanden ist.

Gemeinsam mit Herrn Stud. Alfred Schäfer habe ich diese Beobachtung weiter verfolgt. Die ursprüngliche Oxydationsflüssigkeit wurde zunächst durch Destillation concentrirt und die mit Wasserdämpfen flüchtigen Antheile mittelst eines Kühlers condensirt. Dabei sammelte sich über dem Wasser etwas unverbrauchtes Terpentinöl an, das nunmehr leicht nachweisbare Mengen des riechenden und in Wasser reichlich löslichen Körpers enthielt, auf dessen Anwesenheit der erst erwähnte Geruch zurückzuführen war.

Zur Isolirung dieser Verbindung wurde das, beiläufig gelblich gefärbte Terpentinöl abgehoben, mit Calciumchlorid getrocknet und fractionirt. Der größte Theil ging beim Siedepunkt des Pinens farblos über. Dann folgten zwei Fractionen: 1) 170—200° und 2) 200—215°, die gelblich gefärbt waren und sich auch im Geruch vom Terpentinöl unterschieden. Beide Fractionen, die erste langsam, die zweite schneller, reagirten beim Durchschütteln mit einer

Semicarbazidlösung unter Bildung eines zunächst halbfesten Semicarbazons. Das Product wurde auf Thonplatten gestrichen und nachdem diese die flüssigen Bestandtheile aufgesaugt hatten, wurde das noch gelb gefärbte Semicarbazon mit Ligroïn gewaschen. Dadurch werden die färbenden Verunreinigungen entfernt und das zurückbleibende weiße Product kann durch Krystallisation aus heißem Methylalkohol nunmehr vollkommen rein erhalten werden.

Das Semicarbazon bildet kleine, bei 188° schmelzende Krystalle. Die Analyse ergab:

		Gefunden:		
Berechnet für $C_{10}H_{17}N_3O$:		1	2	3
C	61.54	60.99	61.03	61.24
H	8.72	8.56	8.25	8.95.

Es ließ sich aus diesen Analysen schließen, daß das Semicarbazon eines Ketons von der Zusammensetzung $C_9H_{14}O$ vorlag.

Um diese Verbindung zu isoliren wurde das Semicarbazon durch verdünnte Schwefelsäure (1 : 2) zerlegt, das Keton mit Wasserdampf übergetrieben, mit Aether ausgeschüttelt und nach dem Trocknen mit Pottasche destillirt.

Es wurde ein angenehm riechendes Keton vom Siedepunkt 209—211° erhalten, dessen Analyse die angenommene Zusammensetzung bestätigte.

Berechnet für $C_9H_{14}O$:		Gefunden:
C	78.25	78.00
H	10.14	10.27.

Das Oxim des Ketons war nicht krystallisirt zu erhalten, dagegen konnte als sehr characteristische Verbindung ein Condensationsproduct mit Benzaldehyd gewonnen werden.

Wenn man ein Gemisch gleicher Moleküle des Ketons $C_9H_{14}O$ und Benzaldehyd mit Natriumaethylatlösung einige Zeit stehen läßt und dann mit Wasser verdünnt, so scheidet sich, falls man reines Keton anwandte, ein weißer Körper sofort fest aus. Diese Verbindung ist in Aether außerordentlich leicht löslich, etwas weniger in Methylalkohol und kann aus diesem in schönen, farblosen, durchsichtigen Krystallen vom Schmelzpunkt 106—107° erhalten werden.

Gemäß der Analyse besitzt die Verbindung die Zusammensetzung $C_9H_{12}O : CHC_6H_5$.

Berechnet für $C_{16}H_{18}O$:		Gefunden:
C	84.96	84.68
H	7.97	8.15.

Die Natur des bei der Oxydation des Terpentinöls entstandenen Ketons war nunmehr leicht festzustellen: Die Verbindung ist identisch mit dem von V. Villiger bei der Oxydation der Nopinsäure erhaltenen Nopinon (Ber. d. chem. Ges. **29**, 1927). Von diesem ist das Semicarbazon bereits bekannt und der Schmelzpunkt zu 188,5° angegeben. Das würde aber zur Identificirung nicht genügt haben. Es wurde deßhalb Nopinsäure dargestellt, diese durch Oxydation mit Bleisuperoxyd in Nopinon verwandelt und das so gewonnene Keton mit Benzaldehyd condensirt. Es wurde auch in diesem Fall sehr leicht ein bei 106—107° schmelzendes Condensationsproduct erhalten, welches sich mit dem erst beschriebenen als völlig identisch herausstellte.

		Gefunden:	
Berechnet für $C_9H_{12}O : CHC_6H_5$:		1	2
C	84.96	84.96	84.68
H	7.97	8.14	8.15.

Nunmehr ist es auch vollkommen durchsichtig, welchem Vorgang das Keton $C_9H_{14}O$ bei der Oxydation des Pinens mit Permanganat seine Entstehung verdankt.

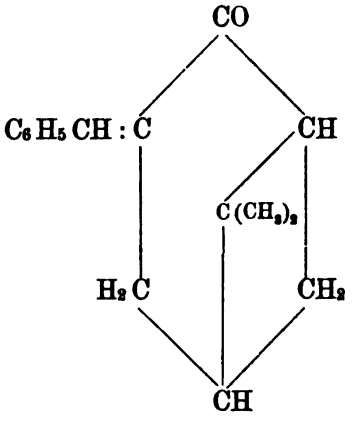
v. Baeyer hat nachgewiesen, daß bei der Oxydation von Rohpinen neben α-Pinonsäure immer in kleiner Menge (ca. 1 %) die isomere Nopinsäure $C_{10}H_{16}O_3$ entsteht, welche durch ihr schwer lösliches Natronsalz characterisirt ist (Ber. chem. Ges. **29**, 25) und welche bei weiterer Oxydation nach der Gleichung

$$C_{10}H_{16}O_3 + O = C_9H_{14}O + CO_2 + H_2O$$

in Nopinon zerfällt.

In diesem Sinne wird die bei der Oxydation von Pinen sich bildende Nopinsäure nun offenbar zum Theil schon im Augenblick der Entstehung zerstört. Das Nopinon ist wegen seiner Flüchtigkeit und wegen seiner Löslichkeit in Wasser und in Terpentinöl aber als Oxydationsproduct der letzteren bisher der Aufmerksamkeit entgangen. Nachdem der Nachweis geführt ist, daß ein Theil der Nopinsäure, welche aus Pinen durch Oxydation entsteht, sofort zerfällt, wird man die Menge, in welcher jene Säure ursprünglich auftritt, wohl etwas höher veranschlagen dürfen, als es v. Baeyer thut.

Die Annahme v. Baeyers, daß im Nopinon dem Carbonyl benachbart eine CH_2-Gruppe steht, findet eine Stütze in der Bildung des beschriebenen Condensationsproducts, dem man die aufgelöste Formel



zuschreiben darf.

---

2. Ueber Verbindungen der Fenchonreihe.

Bei der Oxydation des Fenchens, $C_{10}H_{16}$, entsteht, wie ich früher nachgewiesen habe, (Annal. d. Chem. **300**, 313. **302**, 383) eine Säure $C_{10}H_{16}O_3$, die Oxyfenchensäure, welche isomer mit Nopinsäure ist und sich sehr ähnlich wie diese verhält. Unter dem Einfluß von Oxydationsmitteln zerfällt sie leicht unter Bildung eines mit Nopinon isomeren Ketons $C_9H_{14}O$, das ich Fenchocamphoron genannt habe.

In Gemeinschaft mit Herrn Edgard Neumann habe ich letztere Verbindung einem eingehenderen Studium unterworfen, welches zu einer ausreichend sicheren Feststellung ihrer Constitution geführt hat.

Die Oxyfenchensäure existirt in zwei Modificationen, von denen die eine (D—l-) bei 152—153°, die andern (D—d-) bei 138—139° schmilzt. Das Fenchocamphoron aus der ersteren schmilzt bei 109—110° und ist eine D—d-Modification. Das Fenchocamphoron aus der zweiten schmilzt niedriger und ist eine D—l-Verbindung. Die folgenden Versuche sind mit dem D—d-Fenchocamphoron angestellt worden.

Wenn man das Oxim des Fenchocamphorons mit verdünnter Schwefelsäure (1 : 2) erwärmt, so spaltet es Wasser ab und liefert ein Nitril

$$C_9H_{14}NOH = H_2O + C_9H_{13}N.$$

Dies Nitril riecht wie Camphonitril und Fenchonitril und siedet zwischen 212—215°. Beim Erwärmen mit Natriumalkoholat auf

180–190° wird das Nitril unter Bildung einer Säure $C_8H_{13}CO_2H$ verseift, welche ein lichtbeständiges Silbersalz liefert.

Bei der Reduction (in alkoholischer Lösung durch Natrium) entsteht aus dem Nitril eine Base $C_9H_{15}NH_2$, deren Carbamid bei 131—132° schmilzt.

Berechnet für $CO<^{NH_2}_{NH\,C_9H_{15}}$:		Gefunden:	
C	65.93	65.77	66.29
H	9.89	10.00	9.87.

Wird das Fenchocamphoron mit Salpetersäure oxydirt, so entsteht eine in ihrem Verhalten der Camphersäure sehr ähnliche, schön krystallisirende zweibasische Säure $C_9H_{14}O_4$, welche bei 201—202° schmilzt und ein ganz lichtbeständiges Silbersalz giebt.

Berechnet für $C_9H_{14}O_4$:	Gefunden:
C 58.06	57.69
H 7.52	7.44.

Berechnet für $C_9H_{12}O_4Ag_2$:	Gefunden:
C 27.00	27.73
H 3.00	3.78.

Beim Behandeln mit Acetylchlorid wird die Bicarbonsäure in ein Anhydrid übergeführt, welches aus Chloroform unter Zusatz von Petroläther umkrystallisirt werden kann und bei 176—177° schmilzt.

Berechnet für $C_9H_{12}O_3$:	Gefunden:
C 64.28	64.26
H 7.14	7.32.

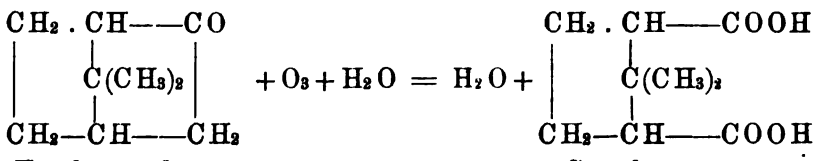
Beim Erwärmen mit Anilin auf dem Wasserbade bildet das Säureanhydrid leicht ein Anilid, welches bei 211° schmilzt.

Berechnet für $C_7H_{12}<^{CO\,OH}_{CO\,NH\,C_6H_5}$:	Gefunden:
C 68.96	68.96
H 7.28	7.56.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, daß die zweibasische Säure aus Fenchocamphoron mit der sog. Camphopyrsäure identisch ist, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Camphopyrsäure:		Beobachtet:
Freie Säure, Schmelzpunkt	203—204°	201—202°
Anhydrid „	178°	176—177°
Anilid „	212°	211°.

Nun ist die Constitution der Camphopyrsäure (= Apocamphersäure) sicher gestellt und mit dem beobachteten Uebergang ist der Beweis für die Richtigkeit der von mir früher (Ann. d. Chem. **300**. 320) angenommenen Constitutionsformel für das Fenchocamphoron geführt:



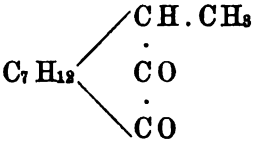
Fenchocamphoron — Camphopyrsäure.

Bei der Gelegenheit mögen auch noch einige andere Beobachtungen erwähnt werden, welche sich auf Verbindungen der Fenchon-Reihe beziehen.

Nach Versuchen, die Hr. W. von Westphalen ausgeführt hat, kann man die bei der trockenen Destillation von Fenchocarbonsaurem Blei entstehende, bei 96° schmelzende gelbe Verbindung $C_{11}H_{16}O_2$, welche bisher als Ortho-Oxyketon aufgefaßt wurde, durch Umsetzung mit Hydroxylamin nicht nur in das schon bekannte bei 108—109° schmelzende Monoxim $C_{11}H_{16}O(NOH)$ verwandeln, sondern unter geeigneten Bedingungen auch in ein Dioxim $C_{11}H_{16}(NOH)_2$, welches bei 198—199° schmilzt und in Wasser löslich ist.

Berechnet für $C_{11}H_{16}(NOH)_2$:		Gefunden:		
C	62.86	62.37	63.12	62.59
H	8.57	8.72	8.96	8.97
N	13.33	13.93	13.79	—

Man wird die Verbindung $C_{11}H_{16}O_2$ daher als Orthodiketon auffassen dürfen, oder als Ortho-Oxyketon, welches in der tautomeren Diketonform zu reagiren vermag. Man darf ihr wahrscheinlich die Formel



zuertheilen.

Als Nebenproduct bei der Darstellung der Fenchoncarbonsäure erhält man beiläufig einen nach langer Zeit erst erstarrenden, dann aber prachtvoll krystallisirenden, bei 122° schmelzenden Körper, der vielleicht das dem Fenchon zugehörige Pinakon darstellt:

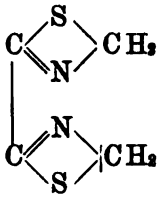
Berechnet für $C_{20}H_{34}O_2$:		Gefunden:	
C	78.43	78.49	78.79
H	11.11	10.97	10.97.

Bezüglich der durch Verseifung des Fenchonitrils entstehenden Fencholensäure ist zu bemerken, daß sich die früher schon geäußerte Vermuthung, daß die Säure in zwei Modificationen besteht, bestätigt hat. Neben dem schon bekannten Amid der Säure vom Schmelzpunkt 113—114° ist ein zweites, bei 85—86° schmelzendes isolirt worden, dem eine feste, in reinem Zustand gegen 70° schmelzende Säure entspricht. Diese Säure ist inzwischen von Cockburn beschrieben worden.

---

3. Ueber Condensationsproducte aus Rubeanwasserstoff, Aldehyden und secundären Basen.

Bei einem Versuche Rubeanwasserstoffsäure mit Formaldehyd zu condensiren, um zu der Verbindung



zu gelangen, wurde Piperidin als Condensationsmittel benutzt. In der That erhielt ich sehr leicht ein Condensationsproduct. Die Analyse zeigte indeß, daß nicht der erwartete Körper vorlag, sondern eine Verbindung, welche aus 1 Mol. Rubeanwasserstoff, 2 Mol. Formaldehyd und 2 Mol. Piperidin unter Austritt von 2 Mol. Wasser entstanden war. Hr. Julius Frölich hat dann auf meine Veranlassung diese Reaction weiter verfolgt und es hat sich gezeigt, daß Rubeanwasserstoff, Aldehyde und secundäre Basen ganz allgemein nach der Gleichung reagiren:

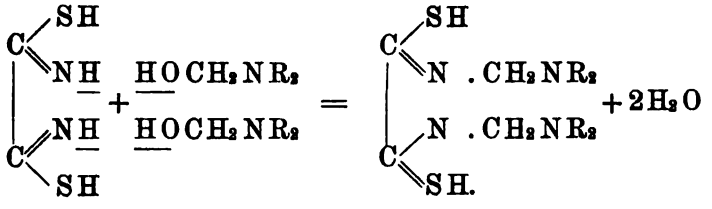
$$(CNSH)_2 + 2RCOH + 2R_2HN = 2H_2O + (CSNH.CHR.NR_2)_2.$$

Die Aufklärung des Mechanismus, nach dem die eigenthümliche Reaction verläuft, machte einige Schwierigkeiten, ist aber vollkommen gelungen.

Es stellte sich heraus, daß die complicirten Producte der Reaction zum Theil Salze sowohl mit Blei als auch mit Salzsäure gaben. Wie ich das für den Rubeanwasserstoff selbst früher nachgewiesen habe (Ber. chem. Ges. **13**. 528) wird die Fähigkeit der Salzbildung mit Metallen durch das Vorhandensein der Gruppe SH bedingt, die in den Condensationsproducten also erhalten geblieben sein muß. Berücksichtigt man ferner, daß Henry nachgewiesen hat, daß Formaldehyd sich an secundäre Amine zu addiren vermag, unter Bildung von Verbindungen des Typus

$$CH_2O + NHR_2 = CH_2\begin{matrix}OH\\NR_2\end{matrix}$$

so sieht man ein, daß Rubeanwasserstoff in seiner Pseudoform in folgender Weise mit den Verbindungen letzterer Art reagiren kann:



Daß die Reaction sich in dieser Weise vollzieht, wird namentlich auch dadurch ersichtlich, daß mit primären Basen sich analoge Condensationen nicht erzielen ließen. Die primären Basen geben mit Aldehyden zwar auch zunächst additionelle Verbindungen, diese verlieren aber sofort intramolecular Wasser

$$R.COH + H_2NR = RCH\begin{matrix}OH\\NHR\end{matrix} = RCH:NR + H_2O$$

und die so entstandenen Producte können natürlich nicht mehr mit Rubeanwasserstoff in Reaction treten.

Für die oben angenommene Constitution der neuen Condensationsproducte spricht auch ihr Verhalten. Die Verbindungen zerfallen leicht wieder in ihre Componenten, wobei der freiwerdende Rubeanwasserstoff sich leicht weiter zersetzt.

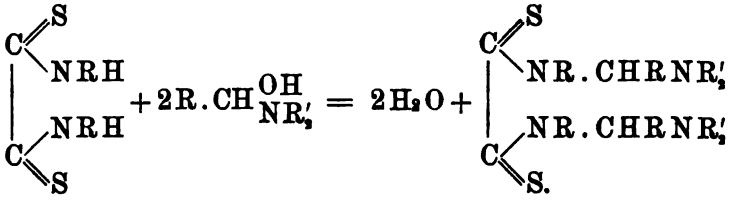
Die verhältnißmäßig große Zersetzlichkeit unserer Verbindungen macht sich auch bei der Darstellung bemerklich, die nur unter bestimmten Bedingungen glatt gelingt. Wenn man die zu condensirenden Substanzen bei gewöhnlicher Temperatur ohne weiteres vermischt, so erhält man meist nur geringe oder gar keine Ausbeute. Auch wenn man stark abkühlt, geht die Reaction nicht

gut von statten, weil die entstehenden Reactionsproducte unveränderten Rubeanwasserstoff leicht einschließen und so der Reaction entziehen. Am zweckmäßigsten ist es bei der Umsetzung als Verdünnungsmittel Chloroform anzuwenden. In diesem lösen sich Aldehyde und Basen und die zu erwartenden Condensationsproducte, nicht aber Rubeanwasserstoff auf, so daß dieser langsam, aber bei kräftigem Umschütteln schließlich vollkommen in Reaction tritt. In einzelnen Fällen, namentlich bei Anwendung aromatischer Substanzen ist ein Erwärmen der Producte auf dem Wasserbad nothwendig.

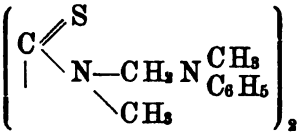
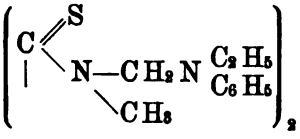
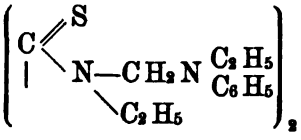
Ohne daß auf die Einzelnheiten der Versuche eingegangen wird, soll die nachstehende Tabelle eine Uebersicht über die Eigenschaften der gewonnenen Producte geben. Die erste Columne giebt den Aldehyd und die Base an, die mit Rubeanwasserstoff in Reaction gesetzt wurden, die zweite die analytisch ermittelte Zusammensetzung der Producte, die dritte deren allgemeine Eigenschaften und die vierte die Schmelzpunkte.

$(CNSH)+$	$\left[C\begin{matrix}SH\\ \diagdown N.CHR.NR'_2\end{matrix}\right]_2$		
$CH_2O+NHC_5H_{10}$	$C_{14}H_{26}N_4S_2$	gelbrothe Nadeln	143°
$CH_3COH+NHC_5H_{10}$	$C_{16}H_{30}N_4S_2$	sehr zersetzlich	90°
$C_4H_9COH+NHC_5H_{10}$	$C_{22}H_{24}N_4S_2$	hellgelb, krystallinisch	119°
$C_6H_5COH+NHC_5H_{10}$	$C_{26}H_{34}N_4S_2$	hellgelbe Nadeln	110°,5
$CH_2O+NH(CH_3)C_6H_5$	$C_{18}H_{22}N_4S_2$	lange rothe Nadeln	139°
$C_6H_5COH+NH(CH_3)C_6H_5$	$C_{30}H_{30}N_4S_2$	hellgelbe Nadeln	154°
$CH_2O+NH(C_2H_5)C_6H_5$	$C_{20}H_{26}N_4S_2$	rothgelbe große Nadeln	107°
$CH_2O+NH(CH_2C_6H_5)_2$	$C_{32}H_{34}N_4S_2$	große Nadeln	123°
$CH_2O+NH(C_2H_5)_2$	—	rothes Oel	—
$C_4H_9COH+NH(C_2H_5)_2$	—	„	—
$CH_2O+NH(C_3H_7)_2$	—	„	—
$CH_2O+NH(C_5H_{11})_2$	—	„	—
$C_6H_5COH+NH(C_2H_5)_2$	$C_{24}H_{34}N_4S_2$	hellgelbe Nädelchen	165°
$C_6H_5COH+NH(C_5H_{11})_2$	$C_{36}H_{56}N_4S_2$	gelb, krystallinisch	160°

Wie schon angedeutet wurde, gelingt es, u. A. Bleiverbindungen der vorstehend characterisirten Körper zu erhalten, wenn man alkoholische Lösungen derselben mit alkoholischen Bleiacetatlösungen vermischt. Diese Eigenschaft muß durch die Anwesenheit der Gruppe SH bedingt sein und verschwinden, wenn man die Verschiebung der Rubeanwasserstoffderivate in die Pseudoform verhindert. Das war aber zu erreichen, wenn man bei der Condensation statt von dem Rubeanwasserstoff selbst von dessen Substitutionsproducten, nämlich den von mir früher dargestellten (Ann. d. Ch. 262. 354), symmetrisch substituirten Thiooxamiden $(CSNHR)_2$ ausging, die nur in folgender Weise mit Aldehyden und secundären Basen reagiren können:



In der That gelang es, folgende Combinationen zu erzielen:

Aus			Schmp.
Dimethylthiooxamid Formaldehyd Methylanilin		gelbrothe Nadeln	141°
Dimethylthiooxamid Formaldehyd Aethylanilin		sehr große rothe Tafeln	108°
Diaethylthiooxamid Formaldehyd Methylanilin		gelbe Nadeln	134°

Diese Verbindungen geben mit Bleilösungen keine Salze.

Nicht condensationsfähig erwiesen sich die Thiooxamide mit aromatischen Substituenden, wie z. B. das Diphenylthiooxamid.

Zur Kenntniß der Gattungen *Margelopsis* und *Nemopsis*.

Vorläufige Mittheilung

von

Dr. **Clemens Hartlaub.**

Helgoland, Königl. Biolog. Anstalt.

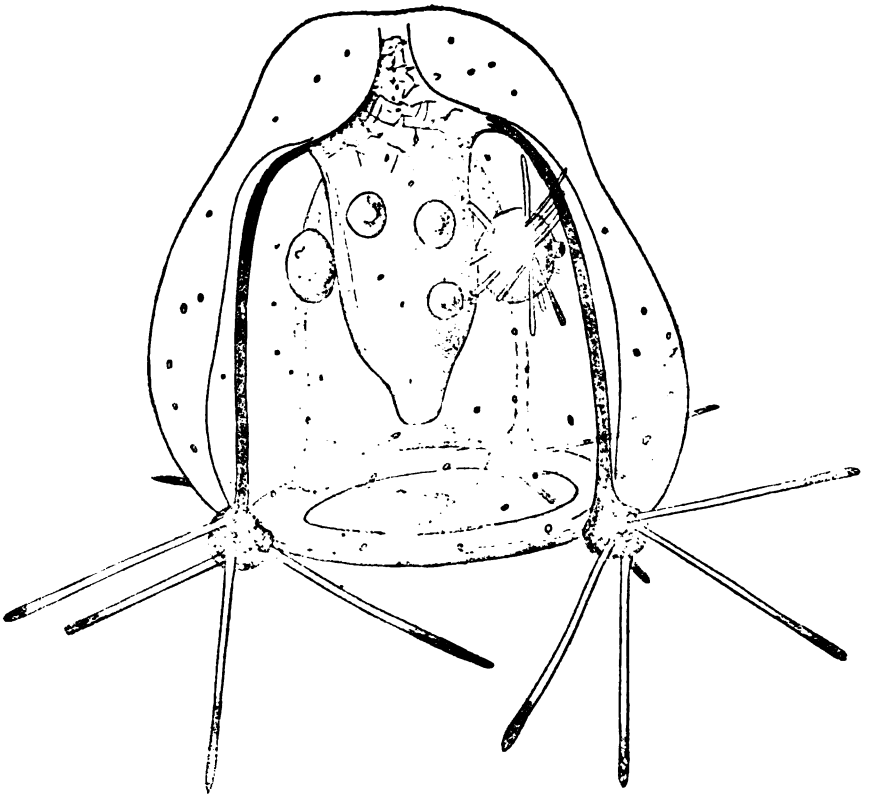
Mit 4 Textfiguren.

(Eingereicht am 28. August 1899 durch Ehlers.)

Vor einigen Jahren beschrieb ich in meinem zweiten Bericht über die Coelenteraten Helgolands (Wiss. Meeresunters. Bd. II Heft I. p. 482 Taf. XVI b. Fig. 12—18. 1897) eine interessante Qualle unter dem Namen *Margelopsis Haeckelii*. Dieselbe erinnert, wiewohl sie sich durch eine einfache Mundöffnung als eine Sarsiade documentirt, an Margeliden durch den Besitz von gruppenständigen Tentakeln. Das Bemerkenswertheste war aber Etwas, was ich damals an dem einzigen zu meiner Verfügung stehenden Exemplare nicht mit voller Sicherheit beobachtete und deßhalb in meiner Beschreibung verschwieg: die dickste der an der Wand des Magens sitzenden Planula-Larven zeigte nämlich die noch sehr kleine Anlage von Tentakeln. Nach der Conservirung des Exemplars war davon Nichts mehr zu sehen, und so unterließ ich vorläufig davon zu sprechen und suchte die schon gezeichneten Tentakelchen auf der Figur Taf. XVI b Fig. 13 wieder zu entfernen, wovon noch die Spuren zu sehen sind.

Nach einem Zeitraum von vier Jahren, innerhalb welchem nicht ein einziges Exemplar wieder beobachtet wurde, haben wir die merkwürdige kleine Qualle plötzlich am 22. August in großer Menge erhalten. Nun war die Frage, ob die am Manubrium sitzenden Planulae noch an Ort und Stelle Tentakeln trieben, sehr bald

Fig 1.



Margelopsis Haeckelii Hartl. mit Hydroidenlarven am Manubrium; stark vergr.

entschieden und nicht blos das, sondern auch das weitere Schicksal, *die Form und Entwickelung* des am *Manubrium von Margelopsis entwickelten Hydroiden.*

Es handelt sich bei diesem um das 1857 von Mc Crady nach einem einzigen Exemplare beschriebene und seitdem nie wieder gesehene, schwimmende Hydrarium „*Nemopsis*", welches sich in dem Referat des Chun'schen Vortrages „Ueber den Bau und die morphologische Auffassung der Siphonophoren" (Verhandl. d. deutschen Zool. Ges. 1897 Fig. 28 p. 48) abgebildet findet.

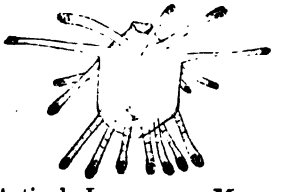
Die Helgoländer „Nemopsis"-Polypen konnte ich nicht nur an den jungen, vom Manubrium der *Margelopsis* eben abgelösten Exemplaren untersuchen, sondern auch an zahlreichen im Auftrieb gefischten älteren.

Die jungen Exemplare gleichen sehr einer Actinula. Solange sie im Zusammenhange mit der Meduse stehen, sind sie so gestellt,

daß ihr oraler Pol, der von 5—7 Tentakeln umgeben ist, dem Manubrium zugewandt ist. Der distale Pol, das dickere Ende des etwas conischen oder birnförmigen jungen Polypen trägt in seiner Mitte bereits einen kurzen, mit einer napfförmigen Einsenkung versehenen Auswuchs und ist von einem doppelten Kranze etwas längerer Tentakel umgeben. Die Gesammtzahl dieser aboralen Tentakeln ist zwölf, die der oralen meist sechs. Die Mundöffnung liegt an der Spitze eines flachen Kegels. Die Tentakel sind schwach geknöpft und werden gespreizt gehalten, wiewohl sie sich auch sehr wohl biegen können.

Die älteren aus dem Auftrieb gefischten Exemplare unterscheiden sich abgesehen von der bedeutenderen Größe, die etwa 1 mm beträgt, durch den Besitz von Medusennospen. Diese Knospen liegen alternirend mit der oralen Reihe der aboralen Tentakeln und bilden einen Kranz dicht oberhalb dieser. Es dürfte dies eine spezifische Eigenthümlichkeit sein, denn bei der Mc' Crady'schen „*Nemopsis*“ *Gibbesi* stehen die Knospen zwischen den zwei Tentakelkränzen am Leibe des Polypen zerstreut. — Die Medusenknospung ist eine sehr lebhafte. Knospen die noch keineswegs dicht vor der Ablösung stehen, sondern nur einen in vier dicke Vorsprünge getheilten Glockenrand besitzen, zeigen neben ihrer Basis schon jüngere Knospenstadien. Aeltere Medusenknospen zeigen an den erwähnten vier Vorsprüngen des unteren Glockenrandes bereits 2 oder 3 kurze, starr nach außen ausgestreckte Tentakeln. Letztere mitsammt dem Glockenrande entwickeln sich also nicht, wie es gewöhnlich der Fall ist, nach der Glockenhöhle zu eingeschlagen, sondern gleich in ihrer definitiven Lage, und erinnern dadurch an die Gattungen Cladonema und Eleutheria. — In der Magenhöhle der Hydranthen lebhaft umherschwimmend sieht man in der Regel große Mengen cilientragender Organismen, die sich bei näherer Untersuchung vielleicht als parasitische Infusorien erweisen werden. Da die Magenhöhle der damit behafteten Exemplare stets Reste von Copepoden enthielt, so handelt es sich vielleicht um Parasiten der letzteren, die der verdauenden Thätigkeit des Polypen eine Zeitlang widerstehen. Polypen welche ich ohne Fütterung einige Zeit im Aquarium hielt, erwiesen sich bei der Untersuchung als vollkommen frei von besagten Organismen.

Fig. 2.



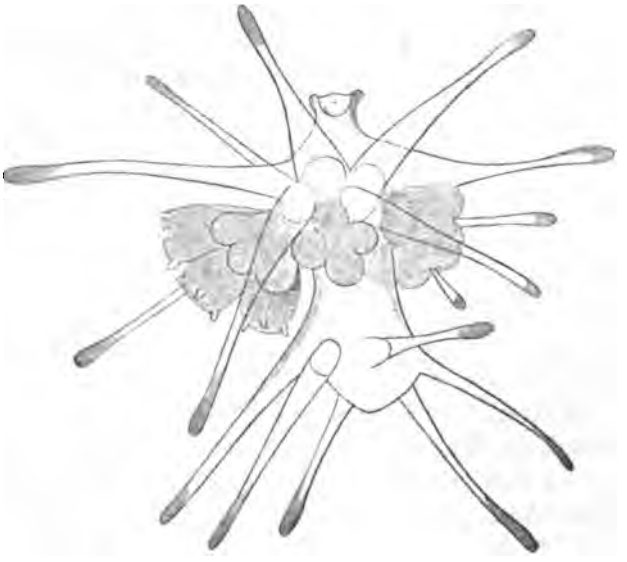
Actinula-Larve von *Margelopsis Haeckelii* Hartl. Der aborale Pol ist nach oben gerichtet. × 50.

Der am aboralen Pole befindliche mit einer napfförmigen Einsenkung versehene Fortsatz ist eine bedeutungsvolle Bildung ganz eigener Art, vor allen Dingen nicht der Rest eines Stiles, wie man ohne die Entwickelung des Polypen zu kennen vielleicht hätte vermuthen dürfen. Die becherförmige Vertiefung ist ausgekleidet von einem höheren ectodermalen Epithel dicht stehender Cylinderzellen und erinnert an die früheste Pneumatophorenanlage der Physophoriden. Die Bedeutung des Fortsatzes ist bis jetzt nicht klar. Ob er als Pneumatophore functionirt oder aber vielleicht zur Anheftung des Polypen dient, bleibt vor der Hand zweifelhaft. Das letztere erscheint mir ziemlich unwahrscheinlich, da die Bildung eines derartigen besonders vorgebildeten Organs zur Anheftung doch ohne Analogon wäre. Andrerseits darf nicht vergessen werden, daß die „*Nemopsis*"-Polypen keine active Schwimmbewegung zeigen. Sie sinken im Behälter zu Boden. — Das Schlagen der Tentakeln, welches bei Mc Crady's Exemplare eine active Fortbewegung bewirkte, fand ich häufig mit dem Absterben verknüpft und es scheint mir in Folge von Unbehagen einzutreten. Die Polypen sind sehr empfindlich gegen Temperaturschwankungen. Erst wenn der Behälter eine Zeitlang der Beobachtung ausgesetzt wird und die Temperatur des Wassers zunimmt, beginnen die Thiere sich zu contrahiren und gleichzeitig mit den Tentakeln zu schlagen, was a tempo geschieht und einer Glocken-Contraction nicht unähnlich sieht. Exemplare, die sich wohl befinden, halten sämmtliche Tentakeln starr auseinander gespreizt. Beim Sinken stellt sich der aborale Pol nach oben ein. — Die Tentakeln der älteren Exemplare erscheinen weniger geknöpft als die der ganz jungen, weil die Bildung der Nesselzellen an ihnen nicht auf das Ende beschränkt ist sondern sich über die distale Tentakelhälfte ausdehnt. —

Die Frage, ob die Polypen schwimmen sei es durch Schlagen der Tentakeln, sei es mit Hülfe des vielleicht als Pneumatophore functionirenden aboralen Fortsatzes, ist natürlich von der größten Bedeutung. — Der bloße Umstand, daß die Polypen in Menge im Auftriebe sich befinden, kann natürlich nicht genügen für die Annahme der anhaltenden Schwimmfähigkeit. Es waren gleichzeitig Massen von Polypen ausstreuenden Margelopsis in der See vorhanden, und der Auftrieb wurde im stark strömenden Wasser gefischt. In meinen Hafengläsern lagen die Polypen stets auf dem Boden; durch Umrühren in die Höhe gewirbelt, sinken sie, da die ausgebreiteten Tentakeln wie eine Art Fallschirm oder Schwebeapparat wirken, sehr langsam wieder nieder. Es ist also jedenfalls anzunehmen, daß sie lange im Meere passiv umherzutreiben vermögen.

Bezüglich der systematischen Stellung der *Margelopsis*-Meduse möchte ich noch bemerken, daß sie ohne Zweifel zu den Codoniden gehört. Die gruppenständigen Tentakeln erinnern allerdings ein wenig an Margeliden und auch die Entwickelung von Eiern zur Planula im Verbande der Gonade ist eine bei Margeliden (Bougainvillia superciliaris L. Ag.) schon festgestellte Erscheinung, aber trotzdem ist unsere *Margelopsis* eine echte Codonide. Schon ihr heftig stoßweises Schwimmen, welches sehr an eine junge Sarsie erinnert, läßt dies erkennen. Ferner ist auch zu beachten, daß wir die *Margelopsis*-Polypen entschieden in die Reihe der Medusen tragenden Tubularien zu stellen haben, und daß diese, es sei an *Ectopleura* und *Corymorpha* erinnert, soweit bis jetzt bekannt ist, nur Codoniden erzeugen.

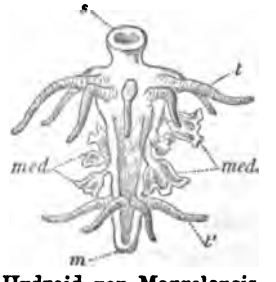
Fig. 3.



Hydroid von *Margelopsis Haeckelii Hartl.* in schwebender Stellung, den oralen Pol nach unten gerichtet. 36 × vergr.

Das Genus Nemopsis wurde 1849 von L. Agassiz gegründet für eine *Margelide*, die sich von andern dadurch unterscheidet, daß sich bei ihr die Gonaden vom Manubrium auf die Radiär-Canäle fortsetzen. Dieser so abweichenden Eigenschaft wegen gründete Agassiz 1862 (Contrib. IV p. 345) eine besondere Familie der *Nemopsidae*, die jedoch Haeckel in seinem System der Medusen (1879 p. 93) nicht anerkannte.

Fig. 4.



Hydroid von Margelopsis Gibbesi (Mc Crady) (Copie nach Chun aus Mc Crady). *m* Mundöffnung, *med* Medusenknospen, *t* aboraler, *t'* oraler Tentakelkranz, *s* aboraler Pol der Colonie.

Haeckel betrachtet die Qualle als Margelide und beschrieb l. c. außer der Agassiz'schen Art *Nemopsis Bachei* noch die zwei neuen Arten *N. heteronema* und *N. Favonia*.

Der Name *Nemopsis* wurde also ursprünglich einer Meduse gegeben. Mc Crady übertrug 1857 (Gymnopht. Charleston Harbor. p. 160 Pl. X Fig. 1—7) den Namen auf den von ihm entdeckten oben erwähnten schwimmenden Polypen, weil er diesen für die Amme der gleichzeitig mit ihr gefundenen Nemopsis-Quallen hielt. Diese Quallen hielt Mc Crady für eine neue Species, die von ihm *N. Gibbesi* benannt wurde. Sie sind nach A. Agassiz identisch mit *N. Bachei L. Agass.* Der Speciesname „*Gibbesi*" würde somit nur noch für den Polypen Anwendung finden dürfen.

Nach meinen oben geschilderten Beobachtungen ist kaum anzunehmen, dass die *Nemopsis*-Quallen von Mc Crady's schwimmenden Polypen herrührten. Die Medusenknospen, welche er an seinem Hydroiden abbildete, gleichen des tief gelappten Glockenrandes wegen durchaus den Medusenknospen meines bei Helgoland beobachteten Schwimmpolypen, und diese weisen durch die charakteristische Stellung ihrer bereits angelegten Tentakeln darauf hin, daß es sich um nichts Anderes als um eine junge *Margelopsis* handelt. Auch spricht für meine Ansicht der Umstand, daß sich nach Mc Crady's Aussage und Abbildungen (l. c. Fig. 4—6) die jungen Quallen von den „Nemopsis"-Polypen ohne Mundtentakeln ablösten. Ich trage daher kein Bedenken den Mc Crady'schen Polypen der Gattung *Margelopsis* zuzuzählen, und somit würde diese Gattung die zwei Hydroidenarten

Margelopsis Gibbesii (Mc Crady)

und „ *Haeckelii* Hartl.,

nebst die zu letzterem gehörige gleichnamige Meduse umfassen. Wie die Ammengeneration des Genus *Nemopsis* sich verhält, ist vor der Hand noch als unbekannt zu verzeichnen.

Es sei noch erwähnt, daß Allman 1871 (Monogr. p. 301) den Mc Crady'schen Polypen für einen vom Stamm eines noch unbekannten Hydroiden abgelösten Hydranthen hielt, was er ebenfalls von Stimpson's *Acaulis* (Mar. Inv. Grand Manan p. 10) annimmt. Er weist auf das Vorkommen derartig abgelöster freischwimmender Tubularienköpfe hin.

Helgoland, August 1899.

Lichtenbergsche Figuren im Inneren von Röntgenröhren.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. Oct. 1899.

Bei den Bestäubungsversuchen, welche ich bei einigen Crookes- und Röntgen-Röhren angestellt hatte[1]), war mir eine Erscheinung aufgefallen, die sich bei einer kugelförmigen Crookes'schen Röhre zeigte. Bei der Bestäubung schlug sich das rothe Mennigepulver gegen den Rand des der Kathode gegenüber entstehenden Fluorescenzfleckes in keulen- oder lappenförmigen Gebilden nieder, wie sie in den Figuren 1 und 2 meiner früheren Mittheilung gezeichnet

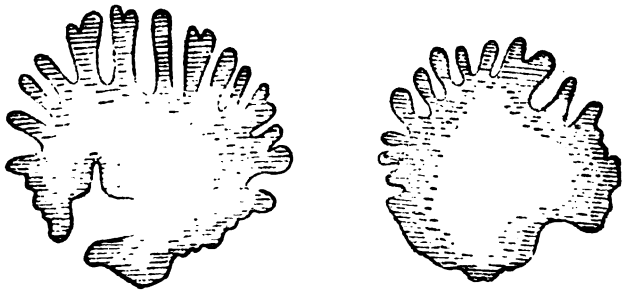


Fig. 1.

sind. Diese Bildungen waren bei einigen anderen Versuchen, deren Ergebnisse leider nicht durch ein photographisches Bild festgehalten worden sind, noch deutlicher hervorgetreten. Ich gebe daher in Fig. 1 zwei andere Bilder von solchen Staubfiguren. Die Conturen der Lappen waren dabei auf einem Pauspapier durchgezeichnet worden, das, mit einigen Einschnitten versehen,

1) Vgl. diese Nachr. 1899. 11. März.

unmittelbar auf die bestäubte Kugel gelegt war. Bei den beiden Versuchen, welchen die Figuren 1 entsprechen, war die Anode zur Erde abgeleitet.

Ich habe nun bemerkt, daß diese Figuren ohne jedes weitere Hülfsmittel gesehen werden können. Wenn man die der Kathode gegenüberliegende Glasoberfläche betrachtet, so sieht man, daß sie keineswegs gleichmäßig fluoresciert; man findet vielmehr, daß auf derselben dunklere Bänder sich bilden, welche gegen die Anode der Röhre in mehr oder weniger gekrümmten Bahnen sich hinziehen. Zuweilen kann man beobachten, wie ein solches Band, das keulenartig bis auf eine gewisse Entfernung von der Anode sich erstreckte, plötzlich eine gegen diese gerichtete Verlängerung bekommt. Der Grund der Erscheinung ist offenbar der folgende. Wenn die negative Elektricität sich in den keulenförmigen Lappen der Figuren 1 anhäuft, so wird durch die Rückwirkung der negativen Ladung die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen an diesen Stellen vermindert. Die Strahlen werden zugleich seitlich deflektiert. Die Fluorescenz des Glases wird also an den von der negativen Electricität bedeckten Stellen schwächer sein, als an den von ihr freien, die ersteren erscheinen dunkel auf hellem Grunde. Damit ist aber zugleich auch der Grund für die Veränderlichkeit der Figuren gegeben. Sobald durch die fortdauernde Kathodenstrahlung die Vertheilung der negativen Elektricität an der Glasoberfläche eine andere wird, sobald werden auch die Intensitätsverhältnisse des Fluorescenzlichtes geändert. Es verschwinden Stellen, die bisher dunkel waren und treten neue auf. So kommt ein Hin- und Herwogen des Fluorescenzlichtes zu Stande, welches ganz den Anschein eines hin- und herwogenden Fluidums erweckt.

Im weiteren Verlaufe der Beobachtungen erlitten die Figuren eine sehr eigenthümliche Veränderung, von der jetzt die Rede sein soll. Die Entladungsröhre wurde hart, so daß die Entladungen unter Umständen überhaupt nicht mehr durchgingen, der Ausgleich der Elektricitäten sich vielmehr in Büscheln oder Funken durch die Luft hindurch vollzog. Durch Commutieren des Stromes ließ sich dann ein Zustand herstellen, bei dem die Entladung eben noch durch die Röhre gieng. An Stelle der keulen- und lappenförmigen Gebilde der früher beschriebenen Figuren traten jetzt überaus zierliche Dendriten von ziemlicher Ausdehnung und reicher Verästelung, von dem Aussehen gewöhnlicher Lichtenberg'scher Figuren bei positiver Entladung. Ebenso wie die früheren Figuren hoben sich auch diese dunkel von hellem Grunde ab.

Die Betrachtung der Erscheinungen erweckt den Eindruck

von einem allmäligen Entstehen der Dendriten; in diesem Falle würde es sich dabei um ein Kriechen der negativen Elektricität an der Oberfläche des Glases handeln, eine Bewegung, welche sichtbar wird, weil in allen Stellen, die von der Ausbreitung der negativen Elektricität getroffen werden, die Intensität der Fluorescenz sich vermindert.

Diese Anschauungen wurden bestätigt, durch Beobachtungen mit einer zweiten birnförmigen Röntgenröhre; der Druck in der Röhre war wesentlich höher als bei der zuvor besprochenen, als Röntgenröhre war sie nur sehr wenig wirksam. Bei dieser Röhre war die fluorescierende Fläche gegenüber der Kathode durch einen hellgrünen Ring begrenzt, dem nach außen hin eine dunklere, schmale Zone vorgelagert war. Wenn der Entladungsstrom einige Zeit durch die Röhre gegangen war, so waren die Grenzen dieser Zone stationär, die äußere Grenzlinie war nicht gerade, sondern leicht gewellt oder gezackt. Nun wurden durch Erregung eines Magnetfeldes die Kathodenstrahlen gedreht, so daß die Grenze der fluorescierenden Fläche um etwa 1 cm vorgeschoben wurde. Dann spielte sich der folgende Vorgang ab. Die der fluorescierenden Fläche vorgelagerte dunkle Zone war zuerst geradlinig begrenzt; bald aber wuchsen aus ihr schmale Stile oder Spitzen hervor, dunkel auf dem hellen Grunde sich abhebend; vgl. Fig. 2, in

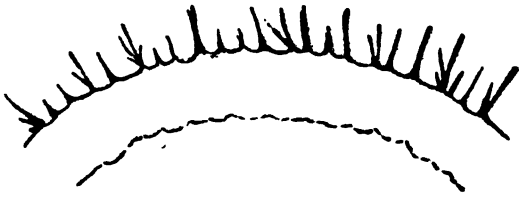


Fig. 2.

welcher die gestrichelte Linie die ursprüngliche Lage der dunkeln Zone angiebt. Zu einer seitlichen Verästelung jener Stile kam es nur in geringem Maaße, allmälig rückte die Basis, von welcher die dunklen Stile sich erhoben, gleichfalls nach außen vor, bis die Grenze der dunklen Zone wieder das Ansehen der gestrichelten Linie angenommen hatte.

Ueber ein von Herrn Fr. Kohlrausch aufgestelltes Problem der Wärmelehre.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung am 28. October 1899.

Am 27. Juli hat Herr Fr. Kohlrausch[1]) der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Berlin eine Arbeit „über den stationären Temperaturzustand eines von einem electrischen Strome erwärmten Leiters" vorgelegt, in der er u. a. das allgemeine Problem eines beliebig gestalteten homogenen Körpers behandelt, von dessen Oberfläche zwei Bereiche auf verschiedenen constanten Temperaturen und auf verschiedenen constanten Potentialen erhalten werden, während die übrige Oberfläche sowohl für Wärme, als für Electricität isolirt ist.

Ich möchte mir erlauben, dieser Arbeit eine Ergänzung zu geben, indem ich jenes allgemeine Problem auf einem anderen Wege und zwar unter Berücksichtigung der von Herrn Kohlrausch nicht in Rechnung gezogenen Thomson-Wärme löse, dabei zugleich auch einige von Herrn Kohlrausch nur aufgeworfene Fragen beantworte. Die Einführung der Thomson-Wärme scheint deshalb besonders erwünscht, weil Herr Kohlrausch auf das genannte Problem eine schöne Methode zur Bestimmung des Verhältnisses aus thermischer und electrischer Leitfähigkeit gründet, und daher die Frage entsteht, ob bei deren Anwendung, die u. U. sehr starke Ströme voraussetzt, die Vernachlässigung der Thomson-Wärme nicht Fehler veranlassen könnte. Außerdem hat das so erweiterte Problem auch ein gewisses theoretisches Interesse und liefert

1) Fr. Kohlrausch, Berl. Ber. XXXVIII, p. 711, 1899.

überdies die Theorie einer Methode zur Bestimmung der Thomson-Wärme selbst.

1) Ich gehe aus von der von mir entwickelten Theorie der umkehrbaren electrischen Wärmeeffecte[1]), um die Behandlung der gestellten Aufgabe gleichzeitig zu einem Anwendungsbeispiel für jene zu benutzen. Bezeichnet T die absolute Temperatur, Θ eine der Substanz individuelle Function von T, A die thermische, λ die electrische Leitfähigkeit, so finden innerhalb eines ungleich temperirten, isotropen, homogenen Körpers räumliche thermoelectrische Kräfte K statt mit dem Componenten

$$X = \frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{d\Theta}{dT}\,\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \ldots \qquad 1)$$

und in Folge hiervon entsteht eine electrische Strömung j mit den Componenten

$$u = -\lambda \frac{\partial(\Phi - \Theta)}{\partial x}, \quad \ldots \qquad 2)$$

wobei Φ das electrostatische Potential bezeichnet. Ferner fließt ein thermischer Leitungsstrom J mit den Componenten

$$U = -A \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \ldots \qquad 3)$$

und ein mit dem electrischen Strom verbundener thermischer Convectionsstrom $\mathfrak{J}$ mit den Componenten

$$\mathfrak{U} = -uT \frac{d\Theta}{dT} \cdot \ldots \qquad 4)$$

Dieser letztere Wärmestrom äußert sich in dem Peltier- und dem Thomson-Phänomen; er enthält auch zugleich denjenigen Theil der Joule-Wärme in sich, der der Arbeit der thermoelectrischen Kraft K an dem betrachteten Raumelement des Körpers entspricht.

Aus Formel (2) ergiebt sich, daß $\Psi = \Phi - \Theta$ bezüglich der erregten electrischen Strömung in ungleich temperirten Körpern dieselbe Stellung einnimmt, wie das Potential Φ in gleichtemperirten; man kann Ψ demgemäß auch kurz als thermoelectri-

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1895, p. 135, v. 1898, p. 113. Wied. Ann. 67, p. 717, 1899. Der Bequemlichkeit halber benutze ich die dort angewandte Bezeichnung.

sches Potential bezeichnen. Es läßt sich leicht zeigen, daß Ψ auch bei electrostatischen Beziehungen an die Stelle von Φ tritt.

Werden an zwei Stellen (a) und (b) eines ungleich temperirten Leiters zwei gleichfalls durch (a) und (b) characterisirte Drähte aus anderer Substanz angelegt, die etwa nach einem Electrometer führen, so ist auf denselben $j_a = 0$, $j_b = 0$, also Ψ_a und Ψ_b constant; zugleich dürfen wir, da in Θ eine additive Constante willkürlich ist, ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß das statische Potential Φ stetig durch die Berührungsstelle geht. Gilt Ψ_a^0 und Ψ_b^0 für das Electrometer, Ψ_a' und Ψ_b' für die Berührungsstellen mit dem Leiter, so erhält man

$$\Phi_a^0 - \Theta_a^0 = \Phi_a' - \Theta_a'; \quad \Phi_b^0 - \Theta_b^0 = \Phi_b' - \Theta_b',$$
$$\Phi_a' = (\Phi)_a \qquad \Phi_b' = (\Phi)_b,$$

wobei $(\Phi)_a$ und $(\Phi)_b$ die Werthe von Φ in dem Leiter an den Berührungsstellen mit den Drähten bezeichnen. Endlich ist

$$(\Psi)_a = (\Phi - \Theta)_a, \quad (\Psi)_b = (\Phi - \Theta)_b.$$

Sonach ergiebt sich die am Electrometer wirksame Potentialdifferenz

$$\Phi_a^0 - \Phi_b^0 = \Theta_a^0 - \Theta_b^0 + ((\Psi + \Theta)_a - \Theta_a') - ((\Psi + \Theta)_b - \Theta_b'),$$

oder, da bei gleicher Substanz und gleicher Temperatur der Electrometertheile $\Theta_a^0 = \Theta_b^0$ ist, und $(\Theta)_a - \Theta_a' = P_a$, $(\Theta_b) - \Theta_b' = P_b$ die thermoelectrische Kraft der Berührung in a und b giebt, auch

$$\Phi_a^0 - \Phi_b^0 = (\Psi)_a + P_a - (\Psi)_b - P_b.$$

Die electrometrische Messung führt also auf $(\Psi)_a - (\Psi)_b$; Ψ vertritt bei derselben in der That vollständig das electrostatische Potential Φ.

2) Wir wollen nun zunächst die Frage erledigen, ob durch die von Herrn Kohlrausch aufgestellten Bedingungen das Problem des electrischen und des thermischen stationären Strömungs-Zustandes eindeutig bestimmt ist.

Bezüglich des Potentiales Ψ findet dies bei mit dem Ort in vorgeschriebener stetiger Weise wechselnder Leitfähigkeit λ jedenfalls statt; denn die Gleichungen für Ψ sind die gewöhnlich behandelten: die Bedingung des stationären Zustandes

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad 5)$$

nimmt wegen

$$u = -\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \ldots \qquad 6)$$

die Form an

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) = 0; \qquad 7)$$

dazu ist an einem Theil der Oberfläche $\Psi = \overline{\Psi}$ vorgeschrieben, an dem anderen

$$\partial \Psi / \partial n = 0.$$

Nicht so direct zu übersehen ist, auch wenn A als gegeben betrachtet wird, die Antwort auf die gestellte Frage bezüglich der Temperatur T; denn die für sie hier geltende Hauptgleichung weicht von der gewöhnlichen, mit (7) conformen ab. Wir erhalten für letztere zunächst:

$$\frac{\partial (U + \mathfrak{U})}{\partial x} + \frac{\partial (V + \mathfrak{V})}{\partial y} + \frac{\partial (W + \mathfrak{W})}{\partial z} + \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) = 0, \quad 8)$$

wobei das letzte Glied die Joule-Wärme darstellt, welche der Arbeit der electrischen Kraft K_0 nicht thermoelectrischen Ursprunges entspricht; diese Gleichung läßt sich aber wegen (5) in der Form schreiben

$$\frac{\partial (U)}{\partial x} + \frac{\partial (V)}{\partial y} + \frac{\partial (W)}{\partial z} = 0, \qquad 9)$$

wobei

$$(U) = U + \mathfrak{U} + u\Phi, \ldots \qquad 10)$$

die Componenten eines aequivalenten Gesammt-Wärmestromes (J) darstellen.

Führen wir noch die Abkürzung

$$\Theta - T \frac{d\Theta}{dt} = \vartheta$$

ein, wobei ϑ eine Function von T allein bezeichnet, so wird einfach

$$(U) = -\left[A \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\vartheta + \Psi)\right], \ldots; \qquad 11)$$

der Gesammtwärmestrom zerfällt also in einen Theil, der normal zu den Flächen $T = \text{Const.}$, und einen, der normal zu den Flächen $\Psi = \text{Const.}$ verläuft; der letztere erscheint als von der electrischen Kraft getrieben oder als convectiv von dem electrischen Strome mitgeführt, und $\lambda(\vartheta + \Psi)$ stellt für ihn die Leitfähigkeit, $(\vartheta + \Psi)$ den Mitführungscoefficienten dar.

Was die Nebenbedingungen angeht, so ist bei Herrn Kohlrausch für dieselben Oberflächentheile, an denen $\Psi = \overline{\Psi}$ vorgeschrieben ist, auch $T = \overline{T}$ gegeben. An der übrigen Oberfläche ist die Summe der Componenten von J und $\mathfrak{J}$ nach der Richtung der Normalen gleich Null, was wegen des dort verschwindenden $\partial\Psi/\partial n$ auf die Bedingung $\partial\overline{T}/\partial n = 0$ führt.

Formel (9) nimmt nun bei Einführung der Werthe (11) und bei Rücksicht auf (7) die Gestalt an

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

$$+\lambda\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial(\vartheta+\Psi)}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial(\vartheta+\Psi)}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial(\vartheta+\Psi)}{\partial z}\right)=0. \quad 12)$$

Da ϑ nach der Beobachtung als in T lineär betrachtet werden darf[1]), so ist diese Gleichung überhaupt in T lineär, und es ist die gewöhnliche Methode zur Untersuchung der eindeutigen Bestimmtheit von T anwendbar.

Wir setzen demgemäß voraus, daß zwei Lösungen T_1 und T_2 mit den Bedingungen vereinbar wären, und schreiben

$$T_1 - T_2 = T', \quad \vartheta_1 - \vartheta_2 = \vartheta', \qquad 13)$$

wobei ϑ', als mit T' proportional, $= c\,T'$ gesetzt werden mag. Für T' gilt dann nach (12), da Ψ eindeutig bestimmt ist,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial T'}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A\frac{\partial T'}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial T'}{\partial z}\right)$$

$$+c\lambda\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial T'}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial T'}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial T'}{\partial z}\right)=0. \qquad 14)$$

Multiplicirt man diese Formel mit T' und intigrirt sie über das Volumelement des betrachteten Körpers, so resultiert

$$\int\left(A\overline{T'}\frac{\partial\overline{T'}}{\partial n}+\tfrac{1}{2}\lambda c\overline{T'}^2\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\right)do$$

$$-\int A\left(\left(\frac{\partial T'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial T'}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial T'}{\partial z}\right)^2\right)dk=0, \qquad 15)$$

wobei das erste Integral über die Oberfläche von k erstreckt ist.

Das Oberflächenintegral wird aber durch die Nebenbedingungen des Problems zu Null gemacht, da an einem Theile der Oberfläche T vorgeschrieben, also $\overline{T'}$ gleich Null ist, im übrigen aber $\partial\overline{T}/\partial n$ (also auch $\partial T'/\partial n$) und $\overline{\partial\Psi}/\partial n$ verschwindet. Es muß sonach das

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1898, p. 126.

Raumintegral gleichfalls Null sein, was in bekannter Weise dahin führt, daß T' verschwindet.

Bei vorgeschriebenen λ und Λ ist also Ψ und T durch die Bedingungen eindeutig bestimmt.

Wechselt λ und Λ mit T, so ist die vorstehende Methode der Beweisführung nicht mehr anwendbar. Hier kann man aber wenigstens für den praktisch wichtigsten Fall geringer Veränderlichkeit in folgender Weise schließen.

Es seien λ und Λ nur um Größen erster Ordnung von Constanten verschieden. Löst man dann das Problem des stationären Zustandes für constante Mittelwerthe λ_0 und Λ_0 von λ und Λ, wo es nach dem Vorstehenden eindeutig bestimmt ist, so sind die entsprechenden Werthe T_0 und Ψ_0 bis auf Glieder erster Ordnung exclusive richtig. Bestimmt man dann durch Einsetzen die diesem T_0 entsprechenden Werthe λ_1 und Λ_1 von λ und Λ, so werden dieselben bis auf Glieder zweiter Ordnung exclusive mit den wirklichen Werthen übereinstimmen, und es ist nach dem Vorstehenden eine zweite Annäherung T_1 und Ψ_1 durch die Bedingungen eindeutig bestimmt. So kann man bis zu beliebiger Genauigkeit fortschreiten.

3) Wir wenden uns nun dem speciellen von Herrn Kohlrausch formulirten Problem zu, bei welchem längs zweier Bereiche der Oberfläche des Körpers T und Ψ je zwei verschiedenen Constanten T_a, T_b und Ψ_a, Ψ_b gleich erhalten sein sollen; es müssen dann allenthalben die Flächen $\Psi =$ Const. mit solchen $T =$ Const. zusammenfallen; denn die Hauptgleichungen, wie auch die letzte Bedingung, daß an dem übrigen Bereich der Oberfläche $\partial \Psi/\partial n$ und $\partial T/\partial n$ verschwinden sollen, sind hiermit vereinbar, und das Problem darf nach dem Vorstehenden als für die practisch wichtigen Fälle eindeutig bestimmt angesehen werden.

Die beiden Gleichungen (5) und (9) nehmen, auf ein Volumenelement angewandt, das zwischen zwei Niveauflächen liegt und seitlich durch eine auf beiden normale Mantelfläche begrenzt ist, die Gestalt an

$$\frac{dj\,q}{ds} = 0, \qquad \frac{d(J)\,q}{ds} = 0, \qquad 17)$$

wobei s die nach Obigem jetzt gemeinsame Richtung der beiden Strömungen j und (J) bezeichnet, q aber den Querschnitt des Volumenelementes angiebt.

Hieraus folgt, falls c und C dem durch q gehenden Stromfaden individuelle Constanten bezeichnen,

$$jq = c, \quad (J)q = C, \tag{18}$$

d. h.

$$-\lambda q \frac{d\Psi}{ds} = c, \quad -A q \frac{dT}{ds} - \lambda q \frac{d\Psi}{ds}(\vartheta + \Psi) = C, \tag{19}$$

also bei Elimination von ds/q

$$\frac{A}{\lambda} = \left(\frac{C}{c} - \vartheta - \Psi\right)\frac{d\Psi}{dT}. \tag{20}$$

Da in dieser Formel mit Ausnahme von C/c alle Glieder nach ihrer Definition längs jeder Fläche $T = \text{Const.}$ auch constant sind, so muß gleiches von C/c gelten; und da C/c längs jedes Stromfadens seinen Werth beibehält, so muß es innerhalb des ganzen homogenen Körpers constant sein. Hieraus folgt dann auch, daß das Verhältniß der Stromdichten i und (J) im ganzen Körper denselben Werth hat.

Nun ist nach dem früher Gesagten in der Wirklichkeit wenigstens sehr nahe ϑ in T lineär, es kann also

$$\frac{C}{c} - \vartheta = a + bT \tag{21}$$

gesetzt werden. Schreibt man

$$\Psi - a - bT = \Psi - \frac{C}{c} + \vartheta = \Omega, \tag{22}$$

so ist

$$\frac{d\Psi}{dT} = b + \frac{d\Omega}{dT}, \tag{23}$$

und es wird aus Gleichung (20):

$$-\frac{A}{\lambda} = \Omega\left(b + \frac{d\Omega}{dT}\right). \tag{24}$$

Ignorirt man den Thomson-Effect, setzt also $b = 0$, so führt diese Formel ganz direct zu der von Herrn Kohlrausch mitgetheilten Lösung.

Um die Gleichung bei Berücksichtigung des Thomson-Effectes zu integriren nehmen wir an, — was der Wirklichkeit sehr nahe entspricht, — daß A/λ in T lineär ist, und setzen

$$A/\lambda = \tau \text{ und } \frac{d\tau}{dT} = \tau', \tag{25}$$

wobei nun τ' eine Constante ist. Aus (24) wird dann

$$b + \frac{\tau}{\Omega} = -\tau' \frac{d\Omega}{d\tau}, \tag{26}$$

und die Substitution

$$\Omega = \tau\omega \qquad 27)$$

führt auf

$$\frac{\omega\tau' d\omega}{1+b\omega+\tau'\omega^2} = -\frac{d\tau}{\tau}. \qquad 28)$$

Hierdurch ist das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt. Für die Ausführung derselben kommt in Betracht, daß nach der Beobachtung $\tau' > 0$ und, wenngleich klein, doch im Allgemeinen größer als b ist. Es folgt deshalb, wenn k die Integrationsconstante bezeichnet:

$$k - ln(\tau) = \tfrac{1}{2} ln(1+b\omega+\tau'\omega^2) - \frac{b}{\sqrt{4\tau'-b^2}} arctg \frac{b+2\tau'\omega}{\sqrt{4\tau'-b^2}}, \qquad 29)$$

eine Formel, die allerdings von der einfachen Gleichung, die Herr Kohlrausch benutzt, weit abweicht, aber trotzdem für $b = 0$, d. h. für verschwindenden Thomson-Effect, in sie übergeht.

Zu einer sehr bequemen Annäherungsformel gelangt man in dem Falle, daß sowohl $b/2\sqrt{\tau'}$, als $\omega\sqrt{\tau'}$ als Größen erster Ordnung neben Eins angesehen werden dürfen, — eine Annahme, die bei den Anwendungen wohl zumeist zulässig sein wird.

Bei Beschränkung auf die niedrigste Ordnung wird dann nämlich das letzte Glied von (29) zu

$$-\frac{b}{2\sqrt{\tau'}} arctg \frac{b+2\tau'\omega}{2\sqrt{\tau'}} = -\frac{b(b+2\tau'\omega)}{4\tau'} = \tfrac{1}{2} ln\left(1 - \frac{b^2+2\tau' b\omega}{2\tau'}\right),$$

und die ganze Formel (29) geht, wenn man noch k mit $ln(p\sqrt{\tau'})$ vertauscht, über in

$$\tau'\left(\frac{p}{\tau}\right)^2 = (1+b\omega+\tau'\omega^2)\left(1-\frac{b^2}{2\tau'}-b\omega\right),$$

was innerhalb der festgestellten Annäherung identisch ist mit

$$\tau'\left(\frac{p}{\tau}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{2\tau'} + \tau'\omega^2. \qquad 30)$$

Hieraus folgt wegen (27)

$$p^2 = \left(1-\frac{b^2}{2\tau'}\right)\frac{\tau^2}{\tau'} + \Omega^2 \qquad 31)$$

und, da nach (25)

$$\int \frac{A}{\lambda} dT = \frac{1}{\tau'}\int \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2\tau'}$$

ist, auch

$$p^2 = 2\left(1-\frac{b^2}{2\tau'}\right)\int\frac{A}{\lambda}dT+\left(\Psi-(a+bT)\right)^2. \qquad 32)$$

Dies ist aber, bis auf die in b multiplicirten Glieder, die von Herrn Kohlrausch angegebene Formel.

Man kann hieraus den Schluß ziehen, daß innerhalb der eingeführten Annäherung die Berücksichtigung des Thomson-Effectes nur die Wirkung übt, daß in der Gleichung (32) $\Psi - bT$ und $(A/\lambda)\ (1-b^2/2\tau')$ (unter b die Constante jenes Effectes verstanden) an Stelle von Ψ und A/λ treten.

4) Während nach dem Gesagten der Zusammenhang zwischen Ψ und T bei den festgesetzten Oberflächenbedingungen sich für alle homogenen Körper allgemein angeben läßt, muß die Bestimmung von T und Ψ in ihrer Abhängigkeit vom Orte für jede Gestalt des Körpers für sich vorgenommen werden und stößt schon in den einfachsten Fällen auf Schwierigkeiten.

Für einen cylindrischen Stab mit zur X-Richtung paralleler Axe, dessen Endquerschnitte auf constanten Temperaturen und constanten Potentialen erhalten werden, lauten die Hauptgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = 0, \frac{d}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}+\lambda\frac{d\Psi}{dx}(\vartheta+\Psi)\right) = 0. \qquad 33)$$

Die erste liefert, wenn j wie früher eine Constante bezeichnet,

$$\lambda\frac{d\Psi}{dx} = -j; \qquad 34)$$

die letztere führt hiernach auf

$$\frac{d}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}\right)-j\frac{d(\vartheta+\Psi)}{dx} = 0$$

oder auch auf

$$\lambda\frac{d}{dx}\left(A\frac{dT}{dx}\right)-j\lambda\frac{d\vartheta}{dx}+j^2 = 0. \qquad 35)$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn λ, A und ϑ als Functionen von T gegeben sind, streng kaum integriren, — es sei denn, daß ϑ als constant betrachtet, also der Thomson-Effect vernachlässigt werden darf. In diesem Falle gelangt man, wenn

$$AdT = dM, \frac{dM}{\lambda} = dN \qquad 36)$$

gesetzt, und unter K eine Constante verstanden wird, sogleich zu

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{dM}{dx}\right)^2 = K-j^2N, \qquad 37)$$

wodurch, da N als Function von M ausdrückbar ist, das Problem auf eine Quadratur zurückgeführt erscheint.

Bestimmt man aus der Endformel T als Function von x und setzt den Werth in den Ausdruck für λ ein, so liefert (34) nach einer Quadratur auch Ψ.

Indessen führt dieser Weg selbst bei einfachen Annahmen über das Gesetz von λ und A auf sehr complicirte Formeln. Daher erscheint der folgende Weg der successiven Annäherung, der auch bei Berücksichtigung der Thomson-Wärme gangbar ist, empfehlenswerther. Er beruht darauf, daß in Wirklichkeit λ und A nur in geringem Maaße mit T variiren, und die Thomson-Wärme stets sehr gering ist, und mag allein in dem Fall, daß die beiden Cylinderenden gleiche Temperaturen besitzen, weiter verfolgt werden, weil über ihn Beobachtungen bereits vorliegen. Wir setzen zunächst λ und A constant gleich λ_0 und A_0 und ignoriren die Thomson-Wärme; dann giebt Gleichung (35), wenn wir den Coordinatenanfang in die Mitte des Stabes legen und die Temperaturen an den beiden Enden $x = \pm d$ zum Ausgangspunkt für die Rechnung einer Temperatur t wählen, in erster Annäherung

$$t = \frac{j^2(d^2-x^2)}{2\lambda_0 A_0}. \qquad 38)$$

Um eine zweite Annäherung für t zu erhalten denken wir nunmehr in λ und A den obigen Werth (38) für t eingesetzt, was wir durch die Bezeichnung λ_1 und A_1 andeuten, und erhalten so, indem wir zugleich für ϑ den Werth (21) benutzen,

$$A_1 \frac{\partial t}{\partial x} + bjt + j^2 \int \frac{dx}{\lambda_1} = k, \qquad 39)$$

wobei k eine Constante bedeutet.

Setzen wir weiter

$$\frac{dx}{A_1} = dL, \quad \frac{dx}{\lambda_1} = dl, \qquad 40)$$

so giebt Gleichung (39) durch Integration

$$te^{+bjL} = h + \int e^{+bjL} dL\ (k - j^2 l). \qquad 41)$$

Das erste Glied des Integrales berechnen wir streng, das zweite aber durch wiederholte theilweise Integration in Annäherung bis auf Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die in Wirklichkeit stets kleine Constante b; indem wir hierbei noch

$$l\,dL = dM, \quad M\,dL = dN \qquad 42)$$

setzen, finden wir schließlich

$$t = he^{-bjL} + \frac{k}{bj} - j^3(M - bjN). \qquad 43)$$

Da Δ_s und λ_s gerade Functionen von x sind, so sind nach (40) L und l ungerade; daher ist auch nach (42) M gerade, N ungerade.

Für $x = \pm d$ erhalten wir aus (43), wenn wir die für $x = +d$ geltenden Werthe von L, M, N durch $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ bezeichnen,

$$0 = he^{\mp bj\bar{L}} - \frac{k}{bj} + j^3(\bar{M} \mp bj\bar{N}). \qquad 44)$$

Hieraus folgt bei erneuter Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf b

$$h = j^3\frac{\bar{N}}{\bar{L}}, \quad \frac{k}{bj} = j^3M - h = -j^3\left(\frac{\bar{N}}{\bar{L}} - \bar{M}\right), \qquad 45)$$

somit also in gleicher Annäherung

$$t = j^3\left[\bar{M} - M - bj\left(\frac{L\bar{N}}{\bar{L}} - N\right)\right]. \qquad 46)$$

Die Differenz δ und die Summe σ der Werthe t, die absolut gleichen, aber entgegengesetzten Werthen x entsprechen, folgen hieraus sehr einfach zu

$$\delta = 2j^3b\frac{L\bar{N} - N\bar{L}}{\bar{L}}, \quad \sigma = 2j^3(\bar{M} - M); \qquad 47)$$

dabei ist

$$L = \int\frac{dx}{\Delta_s}, \quad M = \int\frac{dx}{\Delta_s}\int\frac{dx}{\lambda_s}, \quad N = \int\frac{dx}{\Delta_s}\int\frac{dx}{\Delta_s}\int\frac{dx}{\lambda_s}. \qquad 48)$$

Für λ_s und Δ_s wird man hierin Ausdrücke von der Form $\alpha(1 - \beta x^2)$ und $A(1 - Bx^2)$ zu setzen haben und das in β oder B multiplicirte Glied als klein neben Eins betrachten dürfen. Dann ist

$$L = \frac{x}{A}\left(1 + B\frac{x^2}{3}\right), \quad M = \frac{x^3}{2\alpha A}\left(1 + (\beta + 3B)\frac{x^2}{6}\right),$$

$$N = \frac{x^5}{6\alpha A^2}\left(1 + (\beta + 9B)\frac{x^2}{10}\right),$$

und man erhält für δ in erster Annäherung, da α und A hiermit λ_0 und Δ_0 vertauscht werden dürfen,

$$\delta = \frac{j^3bx(d^2 - x^2)}{3\lambda_0\Delta_0^2}.$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen größten Werth $\bar{\delta}$ für $x = \frac{1}{3} d$; derselbe lautet

$$\bar{\delta} = \frac{8 j^2 b d^2}{81 \lambda_0 A_0^2} = \frac{16 j d b t_0}{81 A_0},$$

wobei $t_0 = j^2 d^2 / 2 \lambda_0 A_0$ die Temperatur in der Mitte des Stabes, d. h. für $x = 0$, bezeichnet.

Für Ψ erhält man den der zweiten Annäherung entsprechenden Werth, indem man in λ den Ausdruck (38) für t einsetzt und (34) damit integrirt. Unter Benutzung der Bezeichnung aus (40) und einer Integrationsconstante γ wird dann $\Psi = \gamma - j l$. Nimmt man für λ_x den oben benutzten Werth $\alpha(1 - \beta x^2)$, so findet sich in der früheren Annäherung

$$\Psi = \frac{j x}{\alpha}(1 + \tfrac{1}{3} \beta x^2) + \gamma.$$

Eine dritte Annäherung ergiebt sich, wenn man den in zweiter Annäherung für t geltenden Werth (46) benutzt.

Göttingen, Sept. 1899.

Neuer Beweis des Hilbertschen Satzes über homogene Funktionen.

Von

Paul Gordan in Erlangen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 28. October 1899.

§ 1.

Anordnung der Produkte der Variabeln.

Die Produkte P von n Variabeln

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

mögen so geordnet werden, daß von den beiden Produkten

$$P_1 = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}; \qquad P_2 = x_1^{\varkappa_1} x_1^{\varkappa_2} \ldots x_n^{\varkappa_n}$$

P_1 vor P_2 steht; wenn es einen Index σ giebt, für welchen:

$$h_1 \leqq \varkappa_1; \quad h_2 \leqq \varkappa_2; \quad \ldots; \quad h_{\sigma-1} \leqq \varkappa_{\sigma-1}; \quad h_\sigma < \varkappa_\sigma$$

ist. P_1 heißt „einfacher" als P_2. Die Produkte P, in denen der Exponent von x_σ eine gegebene Zahl c ist, erhält man, indem man x_σ^c mit Produkten multiplicirt, welche nur die übrigen $n-1$ Variabeln x enthalten.

§ 2.

Ein Hülfssatz.

Hat von gegebenen Produkten

$$P = x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_n^{h_n}; \quad P_\varrho = x_1^{h_{\varrho,1}} x_2^{h_{\varrho,2}} \ldots x_n^{h_{\varrho,n}} \quad (\varrho = 1, 2, 3, \ldots)$$

keines ein andres zum Faktor, so ist ihre Anzahl endlich.

Beweis: Ich nehme an, daß der Satz für Produkte von $n-1$ Variabeln gilt, daß also die Anzahl der Produkte P_ϱ, bei denen der Exponent von x_σ eine gegebene Zahl c ist, endlich ist.

Jedes P_ϱ besitzt wenigstens einen Exponenten, welcher der Ungleichung $h_{\varrho,\sigma} < h_\sigma$ genügt; ich ordne das Produkt P_ϱ dem ersten dieser Eponenten h_σ zu und bezeichne diesen Exponenten mit $c_{\varrho,\sigma}$. Die Anzahl aller überhaupt möglichen $c_{\varrho,\sigma}$ ist

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n$$

also endlich; zu jedem $c_{\varrho,\sigma}$ gehört eine endliche Zahl von P_ϱ; mithin ist die Anzahl der P_ϱ endlich.

§ 3.
Homogene Functionen.

Homogene Funktionen $\mathfrak{f}$ der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sind Aggregate von Punkten P und können in der Form

$$\mathfrak{f} = aP + \psi$$

geschrieben werden, wo a eine von 0 verschiedene Constante bedeutet. Ich ordne die Produkte in $\mathfrak{f}$ so, daß die Produkte in ψ einfacher sind, als das Anfangsglied P.

Hat in zwei Funktionen

$$\mathfrak{f}_1 = a_1 P_1 + \psi_1, \qquad \mathfrak{f}_2 = a_2 P_2 + \psi_2$$

P_1 den Faktor P_2, ist also:

$$P_1 = RP_2,$$

so hat das Aggregat

$$\mathfrak{f}_1 - \frac{a_1}{a_2}\mathfrak{f}_2 R = \psi_1 - \frac{a_1}{a_2} R\psi_2$$

ein einfacheres Anfangsglied als $\mathfrak{f}_1$.

§ 4.
Der Satz von Hilbert[1]).

Gegeben seien homogene Funktionen

$$F_1, F_2, \ldots;$$

ich ordne sie nach ihren Anfangsgliedern und bilde durch Wahl geeigneter Funktionen

$$A_1, A_2, \ldots, A_{\varrho-1}$$

diejenigen ihrer homogenen Aggregate:

$$\mathfrak{f}_\varrho = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \cdots + A_{\varrho-1} F_{\varrho-1} + F_\varrho$$

1) Math. Ann., Bd. 36, S. 474.

welche die einfachsten Anfangsglieder haben. Dies muß möglich sein, da eine Reihe von Produkten, in der jedes folgende einfacher ist als das vorangehende, stets nothwendig im Endlichen abbricht.

Da diese einfachsten Anfangsglieder nach § 3 einander nicht zu Faktoren haben, so ist nach § 2 ihre Anzahl endlich. Sie stimmt mit derjenigen der speciellen F_ϱ überein, deren f_ϱ nicht verschwinden.

Alle gegebenen F sind als Aggregate dieser speciellen F darstellbar, d. h. sie sind lineare Ausdrücke von den speciellen F, wenn man für die Coefficienten in diesen linearen Ausdrücken geeignete Funktionen der Variablen $x_1, \ldots, x_n$ wählt.

München, September 1899.

Grundzüge einer elektrodynamischen Theorie der Gasentladungen.

(I. Mitteilung).

Von

W. Kaufmann.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 25. November 1899.

Einleitung: Der Zweck der vorliegenden Untersuchungen ist die Aufstellung einer Reihe allgemeiner Beziehungen über den zeitlichen Verlauf des elektrischen Stromes in leitenden Gasen, soweit dies ohne Zuhülfenahme von Hypothesen über den Mechanismus des Entladungsvorganges möglich ist.

So fruchtbar nämlich gerade in diesem Gebiete hypothetische Vorstellungen in vielen Fällen sein können — es sei nur an die von Giese, Arrhenius u. A. eingeführte elektrolytische Theorie erinnert —, so schwer ist es, nachher zu unterscheiden, welche der aufgefundenen Gesetzmäßigkeiten als Bestätigung der speziellen Vorstellung anzusehen sind, und welche bloße Folgerungen allgemeiner elektrodynamischer Gesetze sind.

Wir wollen deshalb im Folgenden jede leitende Gasstrecke als völlig definirt ansehen durch ihre geometrischen Dimensionen sowie eine Anzahl ihren Zustand charakterisirende Parameter $\varepsilon_1 \ldots . \varepsilon_n$ (z. B.: Temperatur, Druck, chemische Zusammensetzung des Gases sowie der Elektroden u. s. w.).

Ist die Gestalt der Gasstrecke auch variabel, so ist auch diese durch einen der Parameter auszudrücken.

Dann können wir für ein beliebiges konstant gehaltenes Wertsystem der Parameter das elektrische Verhalten der Gasstrecke darstellen durch eine empirisch bestimmbare Kurve

$$E = f(J) \qquad 1)$$

in welcher E die Spannungsdifferenz der Elektroden, J die Stromstärke darstellt, u. zw. gelte diese Gleichung für den Fall eines stationären Stromes.

[Diese Art der Beschreibung, welche nur direkt meßbare Größen enthält, ist jedenfalls der Einführung irgend einer als „Widerstand des Gases" zu bezeichnenden Größe bei Weitem vorzuziehen.

Man weiß ja, zu welch unglaublichen Kontroversen z. B. die Bestimmung des sogenannten „wahren Widerstandes" des Kohlenlichtbogens geführt hat; bei genauerer Betrachtung stellt sich stets heraus, daß die betr. Beobachter doch nichts Anderes gemessen haben, als E/J oder dE/dJ].

Die durch Gl. 1) dargestellte Kurve wollen wir im Folgenden als die charakteristische Kurve der betrachteten Gasstrecke bezeichnen und einstweilen annehmen, daß jedes beliebige J thatsächlich stationär erhalten werden kann.

1. Aufstellung der Gleichungen für stationären Strom.

Es sei eine geschlossene Leitung[1]) gegeben bestehend aus einer Elektrizitätsquelle von der Spannung E_0, aus einem Widerstande W und einer beliebigen Gasstrecke, charakterisirt durch die Gl.: $E = f(J)$. Der Selbstinduktionskoëfficient des ganzen Kreises sei L.

Dann gilt allgemein:

$$E_0 - JW - (E) - L\frac{dJ}{dt} = 0 \qquad 2)$$

[Durch die Einklammerung von (E) soll angedeutet werden, daß bei einem veränderlichen Strom dasselbe einen anderen Wert haben kann als im stationären Zustand].

Ist der Strom ist stationär, so ist

$$E_0 - JW - E = 0 \qquad 3)$$

ist. Der durch Gl. 3 definirte Zustand braucht jedoch nicht immer stabil zu sein. Er ist nur dann stabil, wenn jedem, dem durch Gl. 3 bestimmten J unendlich benachbarten, Stromwerte $J+\delta J$ ein $\frac{dJ}{dt}$ entspricht, dessen Vorzeichen demjenigen von δJ entgegengesetzt ist.

---

1) Der Einfluß von parallel geschalteten Capacitäten, wozu auch die Capacität der Elektroden selbst zu rechnen ist, soll erst später untersucht werden.

Durch Einsetzen des variirten Stroms in Gl. 2) erhält man aber:

$$E_0 - [J + \delta J]W - \left[E + \left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s \delta J\right] = L\frac{dJ}{dt} \qquad 4)$$

(Der Index s an $\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)$ bedeutet in der von Clausius eingeführten Schreibweise, daß bei der Differenziation die Parameter $s_1 \ldots s_n$ konstant zu halten sind). Durch Subtraktion von Gl. 3) erhält man hieraus:

$$L\frac{dJ}{dt} = -\delta J\left[W + \left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s\right]. \qquad 5)$$

Hieraus ergiebt sich nach dem oben Gesagten, daß der Zustand stabil ist wenn:

$$W + \left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s > 0 \text{ ist.} \qquad 6)$$

Aus Gl. 6) geht hervor, daß für jeden beliebigen, auch negativen Wert von $\frac{\partial E}{\partial J}$ stets durch geeignete Wahl von W ein stabiler Zustand hergestellt werden kann, daß also die am Schluß der Einleitung gemachte Annahme berechtigt ist.

Schreibt man Gl. 3) in der Form

$$J = \frac{E_0 - E}{W}, \qquad 7)$$

so sieht man, daß man dabei den Einfluß einer Erhöhung von W auf die Stromstärke durch gleichzeitige Erhöhung von E_0 kompensiren kann.

Wir haben demnach je nach der Gestalt der charakteristischen Kurve und der Größe von E_0 und W folgende Fälle zu unterscheiden:

1) stabiles Gleichgewicht, d.h. der Strom ist stationär.

2) labiles Gleichgewicht, d. h. der Strom wächst oder fällt immer fort, bis zum nächsten stabilen Gleichgewichtspunkt.

3) einseitiges Gleichgewicht, bestimmt durch einen Zeichenwechsel von $W + \left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s$. Hierbei ist der Zustand stabil gegenüber einer Stromänderung im einen, labil gegenüber einer solchen im entgegengesetzten Sinn.

Als Beispiele für die verschiedenen Fälle mögen die Folgenden dienen:

zu 1) Spitzenentladung $\left[W = 0,\ \frac{\partial E}{\partial J} > 0\right]$; Glimmentladung in Geißlerscher Röhre und Kohlenlichtbogen mit Vorschaltwiderstand

$$\left[W > -\frac{\partial E}{\partial J};\ \frac{\partial E}{\partial J} < 0\right]$$

zu 2) Funkenentladung

$$\left[W = 0,\ \frac{\partial E}{\partial J} < 0\ ^{1})\right]$$

Bogenentladung ohne Vorschaltwiderstand

$$\left[W = 0,\ \frac{\partial E}{\partial J} < 0\right]$$

zu 3) Umschlagen einer Spitzen- in Funkenentladung, einer Glimm- in Bogenentladung; andererseits Erlöschen eines Lichtbogens oder einer Glimmentladung bei einem bestimmten Minimalstrom.

Diese, absichtlich den verschiedensten Teilen des umfangreichen Gebietes entnommenen Beispiele, mögen zur vorläufigen Orientirung darüber dienen, welcher Art die im Folgenden zu behandelnden Erscheinungen sind.

2. Graphische Darstellung.

In Fig. 1 sei eine „charakteristische Kurve" dargestellt. [Ihre Gestalt entspricht etwa den Verhältnissen wie sie beim Uebergang zwischen Glimm- und Bogenentladung vorliegen].

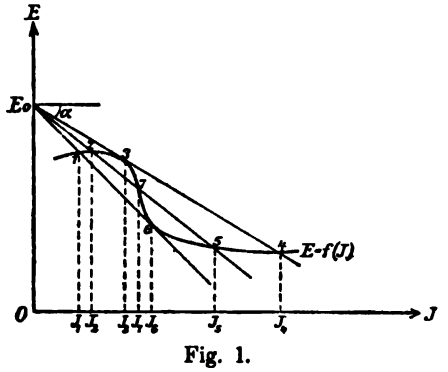


Fig. 1.

Auf der Ordinatenaxe tragen wir eine Strecke ab gleich der Spannung E_0 der Stromquelle und ziehen durch E_0 eine Gerade, die mit der Abscissenaxe einen Winkel $\alpha = \operatorname{arctg} W$ einschließt. Eine willkürliche Variation von W können wir dann durch eine Veränderung von α darstellen. Der Abstand irgend eines Punktes dieser Geraden von der Abscissenaxe ist gleich $E_0 - JW$, und jeder Schnitt- oder Berührungspunkt mit der Kurve

1) Ueber eine experimentelle Bestimmung von $\frac{\partial E}{\partial J}$ für diesen Fall werde ich später berichten.

entspricht einem durch Gl. 3) definirten Gleichgewichtspunkt, und zw. ist nach Gl. 6) der Zustand stabil in den Punkten 1, 2, 4 und 5,labil in 7, einseitig in 3 und 6.

Nehmen wir an, W (resp. α) habe anfangs seinen größten Wert, und wir befänden uns in dem stabilen Punkte 1 (J_1); durch allmähliche Verkleinerung von W wächst der Strom, wir gelangen zu den Punkten 2 (J_2), 3 (J_3) beim Ueberschreiten von 3 geht das Gleichgewicht aus dem stabilen in den labilen Zustand über und J springt von J_3 plötzlich auf den bedeutend größeren Wert J_4 unter gleichzeitiger Abnahme der Spannung; gehen wir jetzt wieder zurück indem wir W vergrößern, so gelangen wir nicht etwa wieder nach J_3 sondern wir bleiben auf dem unteren Teil der Kurve und kommen über J_5 nach J_6, wo der Zustand wieder labil wird, so daß wir bei weiterer Widerstandsvermehrung plötzlich wieder nach J_1 gelangen.

Ein weiteres Beispiel ist in Fig. 2 dargestellt. [Die Kurve entspricht gewissen Fällen der Glimmentladung in Geißler' schen Röhren].

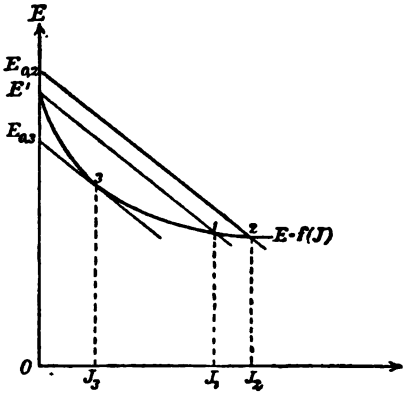


Fig. 2.

Es habe für $J = 0$ die Elektrodenspannung einen endlichen Grenzwert E' [„Entladungspotential"]. Wir wollen W konstant halten und E_0 variiren, was wir in der Figur durch eine Parallelverschiebung der Linie $E_0 - JW$ darstellen. Es sei anfangs $E_0 < E'$, dann entsteht gar kein Strom, da jedem noch so kleinen positiven Stromwert sofort ein negatives $\frac{\partial J}{\partial t}$ entsprechen würde, so daß der Strom wieder verschwände [s. a. den folgenden Abschnitt]. Sowie $E_0 \geqq E'$ wird, setzt der Strom ein, wächst jedoch wegen der Labilität des Anfangszustandes sogleich bis zu dem Wert J_1 und steigt bei weiterer Vergrößerung von E_0 auf $E_{0,2}$ stetig bis auf J_2; gehen wir jetzt mit der Spannung wieder herunter, so können wir unter E' herunter bis $E_{0,2}$ resp. $J = J_3$ gehen ohne daß der Strom verlischt; bei J_3 jedoch haben wir wieder einseitiges Gleichgewicht und eine noch so kleine weitere Verminderung von E_0 bewirkt plötzliches Verlöschen des Stromes. Das hier geschilderte Verhalten ist, wie leicht zu sehen an folgende Bedingungen geknüpft:

$$1)\ \frac{\partial E}{\partial J} < 0; \qquad 2)\ \frac{\partial^2 E}{\partial J^2} > 0; \qquad W < -\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_{J=0}.$$

[In wieweit diese Bedingungen in denjenigen Fällen, die experimentell das oben geschilderte Verhalten zeigen, wirklich erfüllt sind, soll später untersucht werden].

3. Entladungspotentiale.

Denkt man sich die „charakteristische Kurve" bis zum Punkte $J = 0$ fortgesetzt, so entspricht diesem in manchen Fällen ein endlicher Wert von E, der im Folgenden mit E' bezeichnet werden soll, und identisch ist mit dem sogen. „Entladungspotential."

Wir denken uns eine Gasstrecke durch einen widerstandslosen Leiter mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, deren Spannung E_0 beliebig variirt werden kann.

Es sei anfangs $E_0 < E'$.

Dann kann kein Strom eintreten; denn nach Gl. 2) ist für $J = 0$:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E_0 - E'}{L}. \qquad 8)$$

Diese Gleichung würde für $E_0 < E'$ zu einem negativen $\frac{\partial J}{dt}$ führen, doch widerspricht ein solches dem Energiegesetz, in dem sich dann ja gleichzeitig elektromagnetische Energie $\left(\frac{LJ^2}{2}\right)$ und Wärme (EJ) bilden und die Energie der Stromquelle zunehmen würde. Es kann also ein negativer Strom nicht entstehen. Da ein positiver nach Gl. 6) ebenfalls unmöglich ist, so bleibt der Strom Null.

Erst wenn $E_0 > E'$ ist ein Strom möglich, doch hängt der Eintritt des Stromes noch von einer Reihe von Umständen ab, deren Wirkung man unter dem Namen der „Verzögerung" zusammengefaßt hat.

Ich glaube, daß man zu einer ganz annehmbaren Erklärung der Verzögerung selbst, sowie ihrer Aufhebung resp. Verminderung durch Bestrahlung mit ultraviolettem Licht [1]) und mit Röntgenstrahlen [2]) gelangt, wenn man in die Betrachtung noch eine Größe einführt, welche auch bei allen anderen Umwandlungsvor-

1) E. Warburg. — Berl. Ber. 1896; 223—236.

2) H. Starke. Wied. Ann. **66**, 1009—1013; 1898.

gängen eine wesentliche Rolle spielt, nämlich die „Umwandlungsarbeit."

Es sei also angenommen, daß eine gewisse Arbeit A aufzuwenden sei, um das Gas aus dem nichtleitenden Zustande in den dem Strome J entsprechenden zu verwandeln. (Im Sinne der elektrolytischen Hypothese würde A die „Jonisirungsarbeit" darstellen).

Bezeichnet man mit K die Gesamtenergie des betrachteten Systems und schließt man Energiezufuhr von außen aus, so läßt sich das Energiegesetz in folgender Form schreiben:

$$\frac{dK}{dt} = 0 = -E_0 J + L J \frac{dJ}{dt} + J^2 W + EJ + \frac{\partial A}{\partial J}\frac{dJ}{dt} \qquad 9)$$

(die Bedeutung sämtlicher Zeichen ist dieselbe wie früher) und man erhält:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E_0 - E - JW}{\left(L + \frac{1}{J}\frac{\partial A}{\partial J}\right)} \qquad 10)$$

oder falls $W = 0$ ist:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{E_0' - E}{L + \frac{1}{J}\frac{\partial A}{\partial J}}. \qquad 11)$$

An Stelle der wirklichen Selbstinduktion L, die viel zu klein ist, um die hohen Werte der Verzögerung[1]) zu erklären, tritt jetzt also eine „scheinbare Selbstinduktion" von der Größe:

$$L' = L + \frac{1}{J}\frac{\partial A}{\partial J}. \qquad 12)$$

Für sehr kleine Werte von J ist höchstwahrscheinlich $\frac{\partial A}{\partial J} = \text{const}$. (Im Sinne der Dissociationshypothese wäre sowohl A als J im Beginne der Gesamtzahl der schon gebildeten Jonen proportional, also $A/J = \frac{\partial A}{\partial J} = \text{const}$); in folgedessen ist für $J = 0$, $L' = \infty$ und $\frac{dJ}{dt} = 0$; d. h. die Verzögerung ist unendlich groß, wenn das Gas im Anfange ein vollkommner Nichtleiter ist. Dies ist aber bekanntlich niemals der Fall; die neuesten Untersuchungen von J. Elster und H. Geitel[2]) haben mit

1) d. h. derjenigen Zeit die der Strom gebraucht, um bis zum Sichtbarwerden der Entladung anzusteigen.

2) J. Elster und H. Geitel, Phys. Z.-Schr. 1, 11; 1899.

Sicherheit ergeben, daß die Luft stets eine geringe Leitfähigkeit besitzt; und von Herrn H. Kreusler[1]) ist nachgewiesen worden, daß der photoelektrische Strom kurz unterhalb des Entladungspotentiales zu außerordentlich hohen Werten ansteigt, so daß dort jede noch so schwache Lichtquelle schon eine Wirkung giebt. Es ist also der Fall, daß für $t = 0$, $J = 0$ ist, als nicht vorkommend auszuschließen, so daß die Verzögerung stets nur einen endlichen Wert hat. Aus Gl. 9 geht nun unmittelbar hervor, daß jeder Vorgang, der im Stande ist einen Strom im Gase hervorzurufen, resp. den schon vorhandenen zu vermehren, der also den Anfangswert von J vergrößert, auch dJ/dt vergrößern, d. h. die Verzögerung verringern muß. Derartige Vorgänge sind aber die Bestrahlung mit ultraviolettem Licht resp. mit Röntgenstrahlen.

Durch die soeben gemachten Ausführungen verliert die oben gegebene Definition des Entladungspotentials einen Teil ihrer Bedeutung; da die charakteristische Kurve einer belichteten Gasstrecke ja nach dem oben Gesagten für schwache Ströme etwa den in (Fig. 3) dargestellten Verlauf haben würde; d. h. sie würde für $J = 0$ nicht $E = E'$ ergeben, sondern $E = 0$. Im Gegensatze hierzu ist auch in der belichteten Strecke nach wie vor ein scharf definirbares Funkenpotential vorhanden, indem letzteres dem höchsten Punkte der Kurve entspricht, dessen Ueberschreitung nach der Seite der wachsenden J einem Uebergang in den labilen Zustand entspricht.

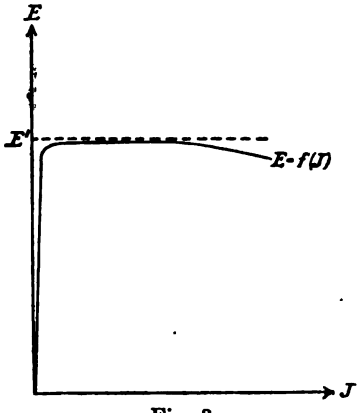


Fig. 3.

[Es sei noch bemerkt, daß die Einführung der Umwandlungsarbeit an den im ersten Teil dieser Untersuchung aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen nichts wesentliches ändert, nur so lange der Strom veränderlich ist, ist die Umwandlungsarbeit von Einfluß, indem sie die „scheinbare Selbstinduktion" vergrößert].

Göttingen, Physik. Inst.

1) H. Kreusler, Verh. phys. Ges. Berlin 17, 86; 1898.

Grundzüge einer elektrodynamischen Theorie der Gasentladungen.

(II. Mitteilung: Versuchsergebnisse.)

Von

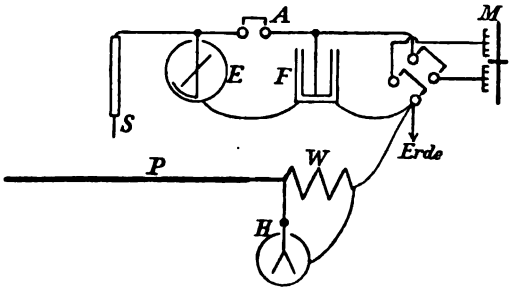
W. Kaufmann.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 14. December 1899.

Um die Anwendbarkeit der in meiner ersten Mitteilung über die Theorie der Gasentladungen [1]) aufgestellten Beziehungen zu zeigen, teile ich im Folgenden einige zu diesem Zwecke unternommene orientirende Versuche mit.

1) Uebergang von Glimm- in Funkenentladung.

Eine feine Spitze (S) (Fig. 1) ist mit einem Braun'schen Elektrometer (E), einer Leydnerflasche (F) und einer kleinen Wimshurstmaschine (M) verbunden; zwischen (E) und (F) befindet sich ein Ausschalter A. Der Spitze gegenüber steht eine Platte (P), deren Abstand von der Spitze stetig variirt werden kann, doch sei der Abstand stets klein gegenüber den Dimensionen der Platte, so daß nahezu der ganze von der Spitze ausgehende Strom die Platte trifft. [Durchmesser der Platte ca. 15 cm, Abstand der Spitze < 3 cm]. Die Platte sei durch einen Alkoholwiderstand (W) zur Erde geleitet und außerdem mit einem Exner'schen Elektroskop H verbunden, dessen Ausschlag ein Maaß für den der Platte zufließenden Strom giebt.



Es befinde sich anfangs die Spitze einige cm von der Platte entfernt; dann erhält man beim allmählichen Laden der Spitze einen Strom zwischen Spitze und Platte erst bei Errei-

1) Gött. Nachr. 1899; p. 243—251.

chung eines gewissen Potentials E' des „Entladungspotentiales". Dasselbe wird am besten dadurch bestimmt, daß man nach Beginn der Ausströmung die Verbindung bei A unterbricht und beobachtet, bis zu welchem Potential das Elektrometer herabsinkt. Um einen willkürlich gewählten (aber bei allen Versuchen gleichen) kleinen Strom J, entsprechend einer bestimmten Divergenz der Blättchen des Elektroskops, zu erzielen, muß das Potential bis zu einem höheren Werte E_J gesteigert werden. [Die gleichzeitig eintretende Potentialerhöhung der Platte, welche nur etwa 50 Volt beträgt, ist hiervon abzuziehen.] Man kann dann die Potentialerhöhung $E_J - E' = \Delta E$ proportional mit $\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_{J=0}$ setzen. Da ΔE positiv ist, ist der Zustand nach Gl. 2 der ersten Mitteilung (l. c.) auch ohne Vorschaltwiderstand stabil, d. h. es ist eine kontinuirliche „Glimmentladung" möglich. Macht man nun denselben Versuch mit immer geringeren Abständen zwischen Spitze und Platte, so findet man, daß nicht nur E', sondern auch ΔE immer kleiner werden; bei einer graphischen Auftragung von ΔE als Funktion von E' findet man, daß ΔE fast linear abnimmt, so daß man durch Extrapolation einen Wert E'_0 ermitteln kann, für den $\Delta E = 0$ wird. Hier kann die Entladung nicht mehr stabil sein, sondern es ist nur noch Funkenentladung möglich. Dieses Ergebnis wird durch die Erfahrung durchaus bestätigt. Lädt man nämlich die Spitze bei anfänglich größerer Entfernung und schiebt dann nach Ausschaltung der Flasche durch Oeffnen von A (zur Schonung der Spitze gegen zu starke Funken) Spitze und Platte langsam zusammen, so beobachtet man ein ganz allmähliches Sinken des Elektrometers [1]), — entsprechend der Abnahme von E' —, bis plötzlich bei einem bestimmten Potential ein Funke zur Platte überschlägt. Das auf diese Weise bestimmte „Funkenpotential" [2]) stimmt aber mit dem durch Extrapolation gefundenen E'_0 überein. Zum Beweise des Gesagten diene folgende Tabelle.

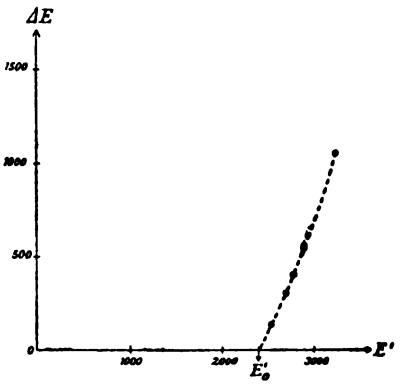
Tab. 1 (Spitze positiv)

E'	E_J	ΔE beob.	
3250 Volt	4300	1050	
2900	3450	550	
2800	3200	400	$E'_0 = 2400$ (beob.)
2700	3000	300	$E'_0 = 2400$ (ber.)
2550	2700	150	

1) Ruckweise Bewegungen sind ein Anzeichen, daß die Spitze verdorben ist.

2) Die Entfernung zwischen Spitze und Platte beträgt hierbei etwa noch 2 mm.

In Fig. 2 ist die Tabelle graphisch dargestellt. Der experimentell gefundene Wert von E_0' (Funkenpotential) schließt sich der nur schwach gekrümmten Kurve sehr gut an.



Bei negativ geladener Spitze erhält man qualitativ dieselben Ergebnisse, doch ist hier E_0' viel kleiner, gleich 1650 Volt. [Ich gedenke deshalb die Versuche für negative Ladung demnächst mit einer Hochspannungsbatterie von 2000 Volt zu wiederholen.]

Denkt man sich bei beliebigem Spitzenbestand den Strom immer weiter gesteigert, so muß unbedingt schließlich $\frac{\partial E}{\partial J}$ negativ werden, d. h. $E = f(J)$ muß irgendwo ein Maximum haben; denn für einen Strom von mehreren Ampère würde man ja Bogenentladung bei niedriger Spannung erhalten. Die Vermutung liegt nahe, daß das Maximum von E bei um so kleineren Stromstärken liege, je kleiner $\frac{\partial E}{\partial J}$ schon für $J = 0$ ist. Diese Vermutung bestätigt sich durchaus:

Schiebt man nach der Bestimmung von E_0' die Spitze ein wenig zurück, so daß E' nur etwa 100 bis 200 Volt größer als E_0', so erhält man bei langsamem Drehen der Maschine Glimm-, bei starkem Drehen Funkenentladung; eine gleichzeitige Beobachtung des Elektrometers ergiebt ein Steigen mit wachsender Stromstärke nur ganz im Anfang; für stärkere Ströme nähert sich $\frac{\partial E}{\partial J}$ dem Wert Null, bis dann bei beginnenden negativen Werten, die natürlich nicht mehr beobachtet werden können, der Funke eintritt.

Dies sind ja zum Teil längst bekannte Erscheinungen; das Neue, worauf es hier ankommt, ist nur die theoretische Verknüpfung der quantitativen Beziehungen.

2) Potentialgefälle während der Funkenentladung.

Ist uns oben der Nachweis gelungen, daß entsprechend den Forderungen der Theorie eine Funkenentladung zwischen einer Spitze und einer Platte an die Bedingung geknüpft ist, daß $\frac{\partial E}{\partial J} \gtreqless 0$, so läßt

sich der experimentelle Beweis hierfür bei der Entladung zwischen Kugeln nicht in derselben einfachen Weise bringen. In letzterem Falle ist der Zustand bei jeder Entfernung der Kugeln labil, und Meßinstrumente, welche im Stande wären, den außerordentlich schnellen Aenderungen von E und J zu folgen, haben wir nicht.

Man könnte nun auf Grund der allgemeinen Stabilitätsbedingung:

$$W+\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s > 0 \text{ (s. d. erste Mitt. p. 245)}$$

annehmen, daß die Einfügung eines genügend großen Vorschaltwiderstandes W die Funkenentladung in eine stetige Entladung überführen müsse. Thatsächlich erhält man hierdurch im Allgemeinen[1]) nur eine Reihe schnell auf einander folgender Partialfunken. Der Grund hierfür liegt, wie leicht zu sehen, in der Capazität der Elektroden; dieselben bilden mit ihren metallischen Zuleitungen für sich ein labiles System, in welchem $W = 0$ und $\frac{\partial E}{\partial J} < 0$; man kommt also nur dann zu dem gewünschten Ziel, wenn man den Vorschaltwiderstand an die Oberfläche der Gasstrecke selbst verlegt, d. h. wenn man die Elektroden nicht aus einem Metall, sondern aus einem schlechten Leiter herstellt[2]). Es ist mir in der That gelungen, zwischen aus Holz gefertigten Kugelcalotten eine völlig stetige Glimmentladung hervorzurufen, welche sich von einer rasch intermittirenden Funkenentladung durch sehr wesentliche Merkmale unterscheidet.

Die Versuchsanordnung ist folgende: Auf den Kugeln eines Funkenmikrometers werden zwei Calotten von möglichst homogenem Holze (ich benutzte Apfelholz) mit etwas Klebwachs befestigt. Die eine Kugel ist mit einer Influenzmaschine, einer großen Leydnerflasche und einem Elektrometer verbunden; die andere durch ein Telephon zur Erde abgeleitet. Ladet man, nachdem die Kugeln in einen größeren Abstand gebracht sind, die Flasche und schiebt dann die Kugeln mäßig rasch zusammen, so hört man bei einer gewissen Entfernung plötzlich ein Geräusch im Telephon, das bei weiterer Annäherung allmählich höher wird und dann plötzlich abbricht (der zuletzt hörbare Ton liegt dabei weit unter der Hörbarkeitsgrenze); gleichwohl zeigt das fortwährende Sinken des Elektrometers an, das nach wie vor ein

1) Die besonderen Fälle, in denen man auf die angegebene Weise stetige Entladung erzielen kann, werden später besprochen werden.

2) s. a. die Beob. von M. Töpler W. A. 66, 660; 1898.

Strom zwischen den Kugeln übergeht. Beobachtet man die Erscheinung im Dunkeln, so sieht man, so lange das Telephon tönt, eine Art Büschel zwischen den Elektroden, u. zw. sitzt der Stiel des Büschels auf der Kathode; in demselben Momente aber, in dem der Ton verschwindet, scheint sich der Stiel von der Kathode loszulösen, und das Büschel zieht sich in eine dünne, einen Teil der Anode bedeckende blaue Lichthaut zusammen, während die Kathode lichtlos ist.

Bei allmählicher Weiterentladung der Flasche wird entweder die Lichthaut immer kleiner und schwächer bis zum gänzlichen Verschwinden, oder es tritt nach einiger Zeit plötzlich wieder das Büschel auf, wobei gleichzeitig das Telephon wieder anspricht; durch weiteres Zusammenschieben kann man dann manchmal die stetige Entladung nochmals hervorrufen. Eine Schwierigkeit bei diesen Versuchen besteht in der raschen Veränderlichkeit der Calotten; nach einigen Minuten sind sie stets unbrauchbar, können jedoch durch Abreiben mit feinem Sandpapier wieder reparirt werden.

In den Fällen nun, in denen es gelingt, die stetige Glimmentladung bis zum völligen Verschwinden des Stromes zu erhalten, kann man direkt $\frac{\partial E}{\partial J}$ bestimmen und zwar in ganz ähnlicher Weise, wie oben bei der Spitzenentladung. Man mißt zu dem Zwecke das zu einem bestimmten Strom gehörige Potential E_J, sowie das Entladungspotential E'; zur Bestimmung des letzteren muß, wegen der außerordentlich langsamen Abnahme des Stromes unmittelbar vor dem Verlöschen eine etwas modifizirte Methode benutzt werden: Das Elektroskop wird durch Zusammschieben der Schutzbleche so eingerichtet, daß die Blättchen sich bei einer bestimmten Divergenz von selbst entladen; beobachtet man dann das Elektroskop bei aufgehobener Verbindung mit dem Alkoholwiderstand, so ladet sich das Elektroskop, so lange $E > E'$, in ziemlich schnellen Intervallen; sowie aber die Differenz zwischen E und E' sehr klein wird, geschieht die Bewegung immer langsamer, bis sie schließlich ganz aufhört; das in diesem Moment am Elektrometer abgelesene Potential ist das Entladungspotential E'; dasselbe ist, wie die nachherigen Beobachtungen zeigen werden, durchaus identisch mit dem Entladungspotential (Funkenpotential) zwischen Metallkugeln von gleichem Krümmungsradius.

Die Differenz $(E_J - E') = \Delta E$ giebt wieder ein Maaß für $\frac{\partial E}{\partial J}$; doch ist hierin noch der Spannungsabfall in den Calotten mit enthalten; um letzteren zu bestimmen, wird eine entsprechende Mes-

sung von E_s bei fest aneinander gepreßten Elektroden gemacht und der hier gemessene Wert ΔE_0 von ΔE abgezogen. Die Differenz ergiebt eine $\frac{\partial E}{\partial J}$ proportionale Größe.

Beobachtungen.

Tab. 2.

(Radius der Calotten 1 cm).

1) Abstand der Calotten $d = 0{,}81$ mm
   $E_s = 9400$ Volt
   $E' = 3800$ (Funkenpotential n. Orgler[1]) 3850)
   $\Delta E = 5600$
2) $d = 0{,}475$ mm
   $E_s = 7800$
   $E' = 2500$ (F. P. n. Orgler 2550)
   $\Delta E = 5300$
3) $d = 0{,}735$ mm
   $E_s = 8700$
   $E_0 = 3600$ (F. P. n. Orgler 3560)
   $\Delta E = 5100$
4) $d = 0{,}000$ mm
   $E_s = \Delta E_0 = 5870$.

Hieraus ergiebt sich für const.$\cdot\frac{\partial E}{\partial J}$ in der Gasstrecke selbst:

$d =$	0,81	0,475	0,735
$\Delta E - \Delta E_0 =$ const.$\cdot\frac{\partial E}{\partial J} =$	-270	-570	-770.

Wenn nun auch die Zahlen der zweiten Zeile als Differenzen zweier nahe gleichgroßen Zahlen nicht sehr genau sind, so dürfte doch mit Sicherheit aus ihnen hervorgehen, daß

$$\frac{\partial E}{\partial J} < 0$$

ist, in Uebereinstimmung mit den Folgerungen der Theorie.

c) Erlöschender Lichtbogen.

Durch allmähliches Verringern der Spannung oder Vergrößern des Vorschaltwiderstandes kann man bewirken, daß ein Lichtbogen bei einer gewissen Minimalstromstärke J_{min} plötzlich erlischt.

1) A. Orgler, Inaug.-Dissert. Berlin 1899.

Wir haben hier also einen Fall von einseitigem Gleichgewicht vor uns, für den die theoretische Bedingung darin besteht, daß für $J > J_{\min}$ der Ausdruck $W + \left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s > 0$, für $J < J_{\min}$ derselbe < 0 und für $J = J_{\min}$ gleich 0 ist. Daß im Lichtbogen $\frac{\partial E}{\partial J} < 0$ ist, dürfte als allgemein bekannt zu betrachten sein.

Durch die im Folgenden mitzuteilenden Beobachtungen wird die Richtigkeit der theoretischen Voraussetzungen durchaus bestätigt.

Die Beobachtungen geschahen in der Weise, daß ein Lichtbogen zwischen Kohlen hergestellt wurde und bei rascher stufenweiser Vermehrung des Widerstandes eine Reihe von Strombestimmungen gemacht wurde bis zum Verlöschen des Bogens für $J = J_{\min}$. Ist E_0 die E. M. K. der Batterie, so bestimmt sich die Spannung am Bogen zu:

$$E = E_0 - JW$$

und die Differenzenquotienten

$$\frac{E_n - E_{n+1}}{J_n - J_{n+1}} = \frac{\Delta E}{\Delta J}$$

geben ein ungefähres Maß für den Differenzialquotienten $\frac{\partial E}{\partial J}$. Die Bestimmungen müssen hierbei möglichst rasch gemacht werden, damit das Abbrennen der Kohlen während dieser Zeit vernachlässigt werden kann, denn die Bogenlänge ist als einer der in der ersten Mitteilung erwähnten Parameter s anzusehen, und es kommt auf die Bestimmung von $\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_s$ d. h. bei constantem s, an.

Ist $W_{\max}$ der zu $J_{\min}$ gehörige größte Wert des Widerstandes, $\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_{\max}$ das zugehörige $\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)$, so muß im Moment des Verlöschens

$$W_{\max} = -\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_{\max}$$

sein. Da nun bei der Beobachtung nur endliche Differenzen gemessen werden, und $-\frac{\partial E}{\partial J}$ mit abnehmendem Strom wächst, so ist zu erwarten, daß die beobachteten Werte stets etwas zu klein sein werden, wie aus der folgenden Tabelle thatsächlich zu ersehen.

Tab. 3 (Maaßeinheiten: Ampère, Volt, Ohm) $E_0 = 130$

J	$-\Delta J$	W	E	ΔE	$-\frac{\Delta E}{\Delta J}$
1,9		40	54		
	0,5			6	12
1,4		50	60		
	0,4			10	25
1,0		60	70		
	0,1			1,5	15
0,9		65	71,5		
	0,5			30,9	61,8
0,4*)		69	102,4		

*) $J_{\min}$.

Es ist also $W_{\max} = 69$ und $-\left(\frac{\Delta E}{\Delta J}\right)_{\max} = 61{,}8$, während die Theorie verlangt, daß $W_{\max} = -\left(\frac{\partial E}{\partial J}\right)_{\max}$; der Grund der Abweichung ist oben dargelegt.

Ich teile noch eine zweite Reihe mit von wesentlich gleichem Verlauf:

Tab. 4 $E_0 = 130$

J	$-\Delta J$	W	E	ΔE	$-\frac{\Delta E}{\Delta J}$
1,9		40	54		
	0,8			10	12,5
1,1		60	64		
	0,2			6,6	33
0,9		66	70,6		
	0,15			7,7	51,3
0,75		69	78,3		
	0,25			15,2	60,8
0,50*)		73	93,5		

*) $J_{\min}$.

$$W_{\max} = 73$$

$$-\left(\frac{\Delta E}{\Delta J}\right) = 60{,}8.$$

Am deutlichsten zeigt sich der Verlauf der Kurven in der

Ein Ausgleichungsproblem.

Von

Georg Bohlmann in Göttingen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. December 1899 von Klein.

1. *Problemstellung.* Eine häufig vorkommende Aufgabe der Praxis besteht darin Beobachtungsdaten auszugleichen. Ein einfacher, nicht selten auftretender Fall läßt sich geometrisch in dieser Weise beschreiben:

Gegeben sind n Ordinaten:

$$y_1, y_2, \ldots\ldots y_n,$$

die zu n aequidistanten Abscissen 1, 2, ... n gehören. Zur Orientierung verbindet man gern ihre Endpunkte durch Sehnen und erhält so einen Polygonzug (y). Man versucht diesen durch einen „ausgeglichenen" Polygonzug (η) zu ersetzen, welcher den Abscissen 1, 2, ... n die Ordinaten:

$$\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots \eta_n$$

zuordnet.

Man kann verschieden verfahren, um dieses praktische Bedürfnis in ein wohldefiniertes mathematisches Problem zu verwandeln. Der Ansatz dieser Note soll der folgende sein:

Wir messen 1) den Grad der Abweichung des ausgeglichenen von dem gegebenen Polygonzuge durch die Zahl:

$$A = \sum_1^n (\eta_\nu - y_\nu)^2,$$

2) die Stärke der Schwankung des ausgeglichenen Polygonzuges durch die Zahl:

$$B = \sum_1^{n-1} (\eta_{\nu+1} - \eta_\nu)^2,$$

3) fixieren wir eine positive Zahl γ^2, welche wir als Gewicht bezeichnen.

Wir ordnen nun dem Polygonzuge (y) als ausgeglichenen Polygonzug (η) denjenigen zu, für welchen:

$$A+\gamma^2 B = \sum(\eta_\nu - y_\nu)^2 + \gamma^2 \sum(\eta_{\nu+1}-\eta_\nu)^2 \tag{1}$$

ein Minimum wird.

2. *Die Differenzengleichung.* Durch Differentiation des Ansatzes ergiebt sich zunächst der:

Satz I. Damit die Ordinaten η den Ausdruch (1) zu einem Minimum machen, ist notwendig und hinreichend, daß sie der linearen Differenzengleichung 2ter Ordnung mit konstanten Koefficienten genügen:

$$\eta_\nu - y_\nu = \gamma^2[\Delta\eta_\nu - \Delta\eta_{\nu-1}]. \tag{2}$$

Dabei bedeutet:

$$\Delta\eta_\nu = \eta_{\nu+1}-\eta_\nu$$

und die Anfangsbedingungen sind:

$$\Delta\eta_0 = \Delta\eta_n = 0.$$

Wir werden in der nächsten Nummer die Gleichungen (2) thatsächlich nach den η auflösen. Damit ist dann der Beweis erbracht — und dieses läßt sich anch direkt zeigen —, daß die Determinante der Gleichungen (2) nicht verschwindet. Hieraus folgt:

Satz II. Zu jedem Polygonzug (y) gehört bei gegebenem Gewichte γ^2 ein und nur ein ausgeglichener Polygonzug (η).

Ferner liest man unmittelbar aus den Gleichungen (2) noch die Sätze ab:

Satz III. Parallele zur x-Achse gehen bei der Ausgleichung in sich über und umgekehrt; geht ein Polygonzug bei der Ausgleichung in sich über, so ist er eine Parallele zur x-Achse.

Dagegen gilt:

Satz IV. Eine Gerade, die nicht parallel zur x-Achse ist, geht nicht wieder in eine Gerade über.

Ferner:

Satz V. Der Schwerpunkt bleibt erhalten, d. h. es ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu$$

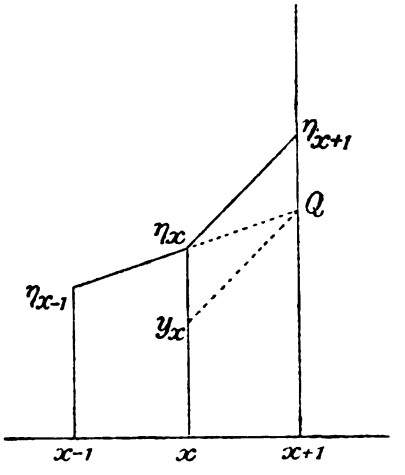
Satz VI. Der ausgeglichene Polygonzug kehrt dem gegebenen immer seine konvexe Seite zu.

Satz VII. Die Schwankung wird bei der Ausgleichung verkleinert, es ist:

$$\sum(\Delta\eta_x)^2 < \sum(\Delta y_x)^2.$$

Der letzte Satz folgt unmittelbar daraus, daß die η den Ausdruck (1) zu einem Minimum machen. Ueberträgt man die Gleichung (2) ins Geometrische, so entsteht für $\gamma^2 = 1$ der:

Satz VIII. Kennt man zwei aufeinanderfolgende η, so findet man alle übrigen durch eine graphische Konstruktion. Um z. B. η_{x+1} aus η_{x-1} und η_x zu finden, verbinde man die Endpunkte von η_{x-1} und η_x durch eine Gerade, welche die Ordinate durch $x+1$ in Q schneidet. Hierauf verbinde man den Endpunkt von y_x mit Q und ziehe durch den Endpunkt von η_x zu dieser Geraden eine Parallele. Der Schnittpunkt dieser Parallelen mit der Ordinate durch $x+1$ liefert den Endpunkt der Ordinate η_{x+1}.



Die nebenstehende Figur erläutert das Verfahren. Wir fügen noch hinzu:

Zusatz I. Es genügt η_1 oder η_n, oder $\Delta\eta_1$ oder $\Delta\eta_{n-1}$ allein zu kennen um alle übrigen Ordinaten η durch das graphische Verfahren zu finden.

Zusatz II[1]). Fängt man statt mit dem richtigen η_1 mit einem beliebigen (falschen) Werte $\bar{\eta}_1$ an und gelangt man durch die graphische Methode mit Hülfe der gegebenen Werte y zu dem Endwerte $\Delta\bar{\eta}_n$ für $\Delta\eta_n$ und findet man ebenso aus einem zweiten beliebigen Anfangswerte $\bar{\bar{\eta}}_1$ den Endwert $\Delta\bar{\bar{\eta}}_n$ statt $\Delta\eta_n$, so kann man den richtigen Wert η_1 aus der Proportion:

$$\Delta\eta_n : \Delta\bar{\bar{\eta}}_n = (\bar{\eta}_1 - \eta_1) : \bar{\bar{\eta}}_1 - \eta_1)$$

geometrisch konstruieren.

3. *Auflösung der Differenzengleichung.* Nach den bekannten Methoden der Auflösung von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koefficienten findet man aus den Gleichungen (2) die li-

1) Diese Bemerkung stammt von Herrn F. Klein.

neare Substitution T, welche die $\Delta\eta$ durch die Δy ausdrückt und die lineare Substitution S, welche die η durch die y ausdrückt. Die erstere wird durch die Gleichungen vermittelt:

$$(3)\quad \Delta\eta_x = \frac{\operatorname{sih}(n-x)\alpha \sum_1^{x-1} \Delta y_t \cdot \operatorname{sih} t\alpha + \operatorname{sih} x\alpha \sum_x^{n-1} \Delta y_t \cdot \operatorname{sih}(n-t)\alpha}{\gamma^2 \operatorname{sih}\alpha \operatorname{sih} n\alpha}, \quad x = 1 \ldots n-1$$

wo α die positive Zahl ist, die der Gleichung

$$\operatorname{coh}\alpha = 1 + \frac{1}{2\gamma^2}$$

genügt. *sih* und *coh* bedeuten die hyperbolischen Sinus und Cosinus.

Unter den Gleichungen (3) sind die erste und letzte besonders einfach. Sie lauten:

$$\gamma^2 \operatorname{sih} n\alpha \cdot \Delta\eta_1 = \Delta y_1 \cdot \operatorname{sih}(n-1)\alpha + \cdots\cdots + \Delta y_{n-1} \cdot \operatorname{sih} 1\alpha$$

$$\gamma^2 \operatorname{sih} n\alpha \cdot \Delta\eta_{n-1} = \Delta y_1 \operatorname{sih} 1\alpha + \cdots\cdots\cdots + \Delta y_{n-1} \operatorname{sih}(n-1)\alpha$$

Da die $\sin x\alpha$ mit wachsendem x stark zunehmen, so sind die hier vorkommenden Reihen (wenn nicht γ sehr groß gewählt wird) rasch konvergent und zur numerischen Rechnung geeignet. Es ist jedoch erforderlich, wenn man das graphische Verfahren der vorigen Nummer anwenden will, den Anfangswert $\Delta\eta_1$ oder $\Delta\eta_{n-1}$ sehr genau zu berechnen, da bei jener Methode sich die Fehler sehr stark summieren.

Hat man z. B. $n = 100$ Werte y_x auszugleichen, so thut man gut etwa von 10 zu 10 Werten die $\Delta\eta_x$ direkt aus Formel (3) zu berechnen und nur dazwischen das rekurrierende Verfahren des Satzes VIII anzuwenden. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, aus der Differenz zwischen dem direkt berechneten und dem rekurrierend gefundenen Werte des End-η einer Periode die Korrektionen für alle einzelnen η zu ermitteln. Ist nämlich ε der Fehler von η_1, so ist der Fehler ε_x, der durch rekurrierende Bestimmung aus dem ungenauen η_1 für η_x entspringt, gleich:

$$\varepsilon_x = \frac{\sin x\alpha - \operatorname{sih}(x-1)\alpha}{\operatorname{sih}\alpha} \cdot \varepsilon$$

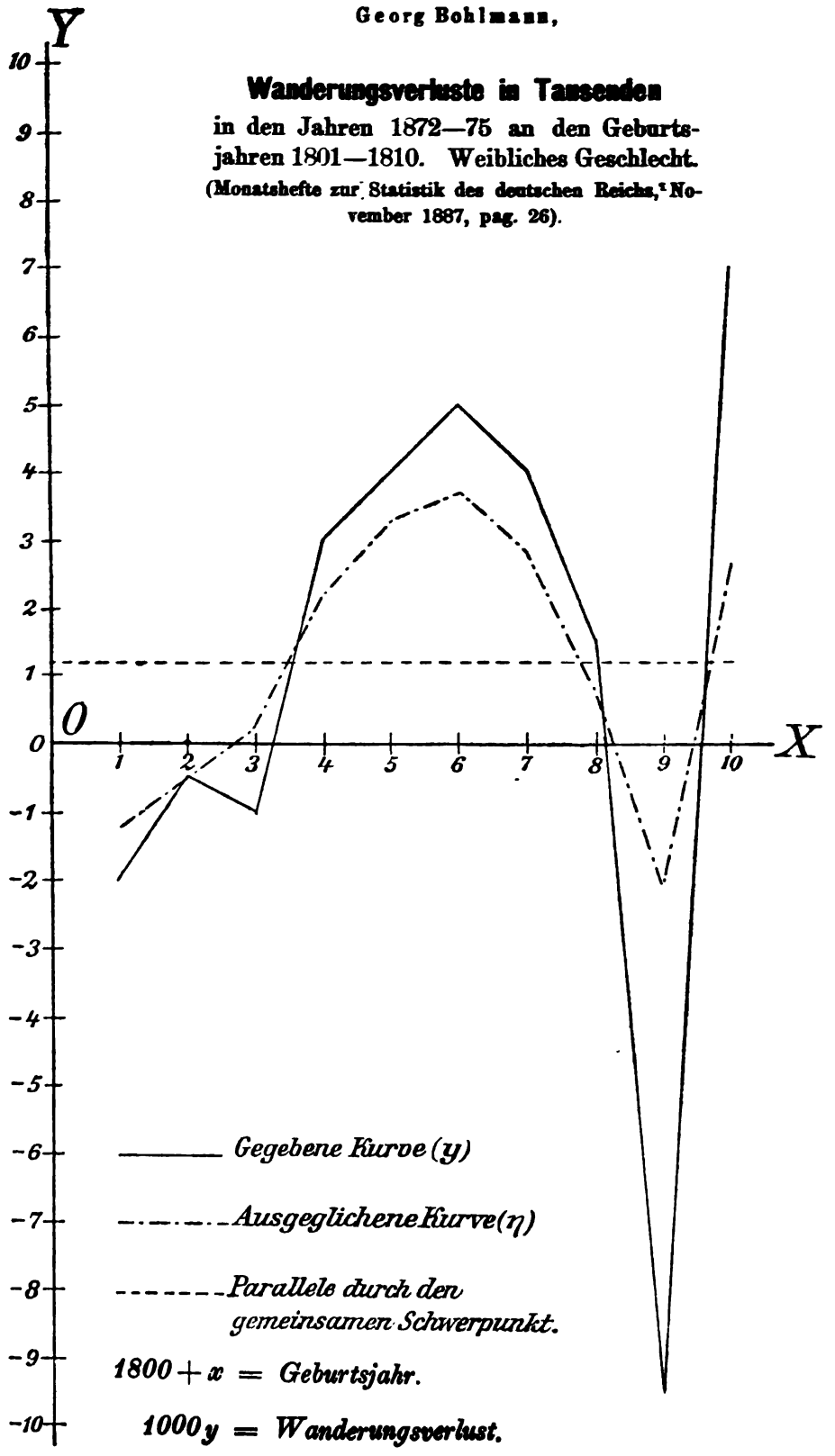
Mit Hülfe dieser Korrektionen ist die numerische Rechnung auch für große Werke von n sehr sicher und ohne zu großen Zeitaufwand ausführbar. In der Figur auf der folgenden Seite ist ein der Bevölkerungsstatistik entnommenes Beispiel mit dem Gewicht $\gamma^2 = 1$ wiedergegeben. Die Berechnung der 10 Ordinaten hat 2 Stunden in Anspruch genommen.

Georg Bohlmann,

Wanderungsverluste in Tausenden

in den Jahren 1872—75 an den Geburtsjahren 1801—1810. Weibliches Geschlecht.

(Monatshefte zur Statistik des deutschen Reichs, November 1887, pag. 26).



Was nun die Substitution S anlangt, welche die η selbst durch die y ausdrückt, so sei:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k. \qquad (i = 1 \ldots . n) \tag{4}$$

Alsdann kann man das Schema der a_{ik} am einfachsten so beschreiben:

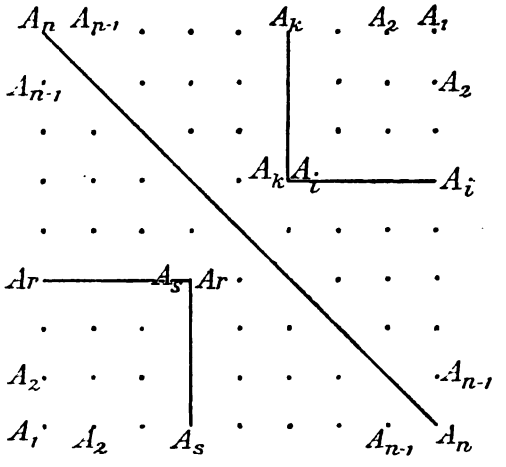
Sei A_x der Nenner des x^{ten} Näherungswertes in der Kettenbruchentwickelung:

$$\frac{1}{1} + \frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha} + \frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha} + \frac{-1}{2\operatorname{coh}\alpha} + \cdots,$$

wo der Punkt über dem Pluszeichen bedeuten soll, daß es eigentlich in den Nenner des vorhergehenden Bruches gehört, so wird:

$$A_x = \frac{\operatorname{sih} x\alpha - \operatorname{sih}(x-1)\alpha}{\operatorname{sih}\alpha}$$

eine Reihe von wachsenden, positiven Zahlen. Man bilde nun den Rand eines Quadrates von n^2 Elementen durch die Zahlen A in dieser Weise:



Um auch das Innere des Schemas auszufüllen, markiere man die Diagonale $A_n \ldots A_1$. Jedes Element, das rechts von ihr steht, wird durch Multiplikation derjenigen beiden A des Randes erhalten, die in derselben Horizontale anf der letzten Vertikale bezw. in derselben Vertikale in der ersten Horizontale stehen, wie dies durch $A_k A_i = A_i \cdot A_k$ angedeutet ist. Aehnlich verfährt man bei der Bildung der Elemente $A_r A_s$ links von der Diagonale, wie dies in dem Schema angedeutet ist. Auf der Diagonale selbst führen

beide Verfahren zu dem gleichen Ziel. Dividiert man nun alle Elemente des so ausgefüllten Schemas durch die Summe aller A:

$$A = \sum A_\varkappa = \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha},$$

so erhält man das Schema der a_{ik}.

Aus der beschriebenen Beschaffenheit der Substitutionen S und T resultieren die Sätze:

Satz IX. Sowohl in der Substitution S als in der Substitution T sind alle Koefficienten positiv. Speziell in der Substitution S ist noch die Summe aller Koefficienten einer Horizontale oder Vertikale gleich 1. Ueberdies ist das System der a_{ik} symmetrisch. In einer Reihe desselben nehmen die Koefficienten immer bis zur Diagonale zu, von da aus wieder ab. Auf der Diagonale selbst liegt das Minimum der Koeffizienten in der Mitte, das Maximum an den Enden.

Hieraus folgt aber:

Satz X. Die η sind Mittelwerte der y, bei der Bildung von η_k fallen y_k und die in der nächsten Umgebung von y_k liegenden y am stärksten, die übrigen um so weniger ins Gewicht, je weiter sie von y_k abstehen. Das Maximum der η ist kleiner als das Maximum der y, das Minimum der η größer als das Minimum der y.

Satz XI. Sind alle y von gleichem Zeichen, so sind auch alle η von demselben Zeichen. Wenn alle y beständig zunehmen (abnehmen), so gilt Gleiches von den η.

4. *Einführung multiplikativer Verbindungen.* An Stelle der y und η kann man lineare Funktionen von diesen:

$$Y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + y_n,$$
$$H = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \eta_{n-1} + \eta_n$$

einführen, die sich multiplikativ verhalten, so daß bei Ausführung der Substitution S, H bis auf einen konstanten, von der Wahl der y unabhängigen Faktor in Y übergeht. Sei

$$H - Y = \varrho \cdot H, \tag{5}$$

so müssen die $\lambda_\varkappa$ der linearen homogenen Differenzengleichung 2ter Ordnung genügen:

$$\lambda_{\varkappa+1} - \left(2 + \frac{\varrho}{\gamma^2}\right) \cdot \lambda_\varkappa + \lambda_{\varkappa-1} = 0, \qquad \varkappa = 1 \ldots n$$

wo $\lambda_0 = \lambda_1$, $\lambda_{n+1} = \lambda_n = 1$ zu setzen ist. Daher muß die Determinante verschwinden:

$$D_n(\omega) = -(\omega - 2) \cdot F_{n-1}(\omega).$$

Dabei ist $\omega = \frac{\varrho}{\gamma^2} + 2$ gesetzt und $F_n(\omega)$ ist der Nenner des n^{ten} Näherungswertes in der Kettenbruchentwickelung:

$$F(\omega) = \frac{-1}{-\omega} + \frac{-1}{-\omega} + \cdots.$$

Uebrigens wird

$$F_{n-1}(\omega) = \frac{(-1)^{n-1}\sin n\varphi}{\sin\varphi},$$

wenn man

$$\omega = 2\cos\varphi$$

setzt. Hieraus folgt:

Satz XII. Die Gleichung $D_n(\omega) = 0$ hat n reelle, von einander verschiedene Wurzeln, die sämtlich zwischen -2 und $+2$ liegen:

$$\omega = 2\cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1 \ldots n-1$$

Satz XIII. Den n Werten

$$\varrho = -4\gamma^2\sin^2\frac{k\pi}{2n}$$

entsprechen n multiplikative Verbindungen Y_k, die sich aus

(6) $\sin\varphi_k \cdot Y_k = \Delta y_{n-1}\cdot\sin 1\varphi_k + \Delta y_{n-2}\cdot\sin 2\varphi_k + \cdots + \Delta y_1\cdot\sin(n-1)\varphi_k$

ergeben, wenn man $\varphi_k = \frac{k\pi}{n}$ setzt und k von 0 bis $n-1$ wandern läßt.

Setzt man analog:

$$\sin\varphi_k . H_k = \Delta\eta_{n-1}.\sin 1\varphi_k + \Delta\eta_{n-2}\sin 2\varphi_k + \cdots + \Delta\eta_1 . \sin(n-1)\varphi_k,$$

so hängt H_k mit dem entsprechendem Y_k durch die Gleichung zusammen:

$$H_k = \frac{Y_k}{1 + 4\gamma^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi_k}, \qquad k = 0 \cdots n-1$$

und im Besonderen ist:

$$H_0 = \eta_1 + \cdots + \eta_n = Y_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

in Uebereinstimmung mit Satz V.

Aus der Darstellung der H durch die Y ergiebt sich:

Satz XIV. Die Schwankung des ausgeglichenen Polygonzuges ist

$$\sum_{x=1}^{n-1}(\Delta\eta_x)^2 = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\varphi_k H_k^2 = \frac{2}{n}\sum\frac{\sin^2\varphi_k Y_k^2}{(1+4\gamma^2\sin^2\frac{1}{2}\varphi_k)^2}$$

Sie hängt mit der Schwankung des Polygonzuges (y) zusammen durch die Gleichung:

$$\sum (\Delta \eta_x)^2 = \frac{\sum (\Delta y_x)^2}{(1+4\gamma^2 \sin^2 \vartheta)^2}$$

wo ϑ einen Mittelwert der $\frac{1}{2}\varphi_x$, also eine Zahl zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ausschließlich der Grenzen bedeutet.

Dieser Satz bedeutet eine Verschärfung des Satzes VII.

Aus der Darstellung der H durch die Y folgt ferner:

Satz XV. Denkt man sich die Substitution S wiederholt, indem man den Polygonzug (η) seinerseits wieder nach demselben Verfahren ausgleicht, und denkt man sich diese Operation unbegrenzt oft fortgesetzt, so ergeben die Substitutionen:

$$1,\ S,\ S^2, \cdots\cdots,$$

angewandt auf den ursprünglichen Polygonzug (y), eine unendliche Reihe von Polygonzügen:

$$(y),\ (\eta),\ (\overline{\eta}),\ \cdots\cdot$$

deren Grenzlage ein Polygonzug $(\overset{\infty}{\eta})$ ist, der durch eine Parallele durch den Schwerpunkt des ursprünglichen Polygonzuges (y) gebildet wird; d. h. es werden die Ordinaten an der Grenze:

$$\overset{\infty}{\eta}_x = \frac{y_1 + y_2 + \cdots\cdots + y_n}{n} \quad (x = 1 \ldots\ldots n).$$

5. *Beziehung zu den trigonometrischen Reihen.* Setzt man y_x und η_x in trigonometrische Reihen der Form:

$$(7)\quad y_x = A_0 + A_1 \Delta \sin 1\varphi_{x-1} + A_2 \Delta \sin 2\varphi_{x-1} + \cdots + A_{n-} \Delta \sin (n-1)\varphi_{x-1}$$

$$(7')\quad \eta_x = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \Delta \sin 1\,\varphi_{x-1} + \mathrm{A}_2 \Delta \sin 2\,\varphi_{x-1} + \cdots \mathrm{A}_{n-1} \Delta \sin (n-1)\,\varphi_{x-1},$$

wo φ_{x-1} wie früher $\frac{(x-1)\pi}{n}$ bedeutet und

$$\Delta \sin k\varphi_{x-1} = \sin k\varphi_x - \sin k\varphi_{x-1}$$

gesetzt ist, so ist eine solche Entwickelung immer möglich. Die einzelnen Glieder der Reihe würden durch Anwendung unseres Verfahrens so ausgeglichen werden, daß geradezu $A_k \Delta \sin k\varphi_{x-1}$ in $\mathrm{A}_k \Delta \sin k\varphi_{x-1}$ übergeht, wobei sich:

$$(8)\qquad \mathrm{A}_k = \frac{A_k}{1+4\gamma^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}}$$

ergiebt. A_0 bleibt ungeändert gleich A_0. Dies folgt unmittelbar aus der Differenzengleichung 2. Von der Funktion y, die durch die ganze trigonometrische Reihe (7) dargestellt ist, geht man daher zu der ausgeglicheneren Funktion η in der Darstellung (7') einfach dadurch über, daß man an Stelle der A die A der Gleichungen (8) für $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$ setzt.

Da die A sich umgekehrt als lineare Funktionen der y darstellen laßen, indem man die Gleichungen (7) nach ihnen auflöst und die A dieselben Funktionen der η werden, und da nach (8) die A sich multiplikativ verhalten, so müßen sie bis auf konstante, d. h. von der Wahl der y unabhängige, Faktoren mit den λ der vorigen Nummer identisch sein. In der That entstehen die Gleichungen (7) einfach aus den Gleichungen (6), wenn man diese nach den y auflöst und man findet auf diese Weise:

$$A_k = \frac{(-1)^k}{n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\varphi_k \cdot Y_k, \quad A_k = \frac{(-1)^k}{n} \operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}\varphi_k \cdot H_k, \quad k = 1 \ldots n-1$$

$$A_0 = Y_0, \qquad A_0 = H_0$$

6. *Uebertragung des Problems auf kontinuierliche Veränderliche.* Ueberträgt man das Problem auf kontinuierliche Veränderliche, so wird die in der vorigen Nummer behandelte Beziehung zu den trigonometrischen Reihen weit deutlicher, dafür geht die Einfachheit der graphischen Konstruktion (vergl. Satz VIII) verloren. Im Uebrigen wird alles analog dem Falle der diskontinuierlichen Veränderlichen. Man macht wieder den Ansatz (1), nur daß diesmal

$$A = \int_a^b (\eta - y)^2 dx, \qquad B = \int_a^b \eta'^2 dx$$

zu setzen ist, wenn die gegebene Kurve $y = f(x)$ in demjenigen Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ durch eine ausgeglichene mit den Ordinaten η ersetzt werden soll. η' bedeutet natürlich $\frac{d\eta}{dx}$. An Stelle der Differenzengleichung (2) tritt die Differentialgleichung

$$\eta - y = \gamma^2 \cdot \eta'',$$

mit den Anfangsbedingungen, daß die Kurve parallel der x-Achse ansetzt und endet:

$$(\eta')_a = (\eta')_b = 0.$$

An Stelle der Gleichungen (7), (8), (9) treten

$$\gamma \operatorname{sih} \frac{b-a}{\gamma} \cdot \eta' =$$

$$\operatorname{sih} \frac{b-x}{\gamma} \int_a^x \frac{dy}{dt} \operatorname{sih} \frac{t-a}{\gamma}\, dt + \operatorname{sih} \frac{x-a}{\gamma} \int_x^b \frac{dy}{dt} \operatorname{sih} \frac{b-t}{\gamma}\, dt$$

und:

$$\gamma \cdot \operatorname{sih} \frac{b-a}{\gamma} \cdot \eta = \tag{9}$$

$$\operatorname{coh} \frac{b-x}{\gamma} \int_a^x y \operatorname{coh} \frac{t-a}{\gamma}\, dt + \operatorname{coh} \frac{x-a}{\gamma} \int_x^b y \cdot \operatorname{coh} \frac{b-t}{\gamma}\, dt.$$

Ist nun $y = f(x)$ in dem Intervalle von $x = a$ bis $x = b$ in eine trigonometrische Reihe entwickelbar, so kann man die Reihe aufstellen:

$$y = \tfrac{1}{2} A_0 + A_1 \cos \frac{x-a}{b-a} \pi + A_2 \cos 2 \frac{x-a}{b-a} \pi + \cdots$$

Alsdann ist auch η in eine trigonometrische Reihe entwickelbar:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 \cos \frac{x-a}{b-a} \pi + \mathrm{A}_2 \cos 2 \frac{x-a}{b-a} \pi + \cdots$$

und es wird:

$$\mathrm{A}_k = A_k \cdot \frac{(b-a)^2}{k^2 \pi^2 \gamma^2 + (b-a)^2}, \; k = 0, 1 \ldots \infty \tag{10}$$

Mit Hülfe des Michelson'schen Apparats[1]) ließe sich daher die Ausgleichung einer Kurve nach unserem Ansatz sehr leicht bewerkstelligen. Erst bestimmt man aus der gegebenen Kurve $y = f(x)$ die Koefficienten A, sodann stellt man in dem Apparat an Stelle der A_k die aus den letzten Gleichungen zu berechnenden A_k ein, alsdann zeichnet der Apparat die Kurve für η.

Betrachtet man z. B. die Weierstraß'sche Funktion[2]):

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cos(\alpha^n x \pi),$$

wo β einen positiven echten Bruch, α eine ungerade ganze Zahl bedeutet, für die $\alpha\beta$ größer als $1 + \frac{3}{2}\pi$ ist, so ist bekanntlich y eine durchaus stetige Funktion, die an keiner Stelle differenzierbar ist. Wendet man auf sie unser Ausgleichungsverfahren in einem Inter-

1) A. A. Michelson and J. W. Stratton, A new Harmonic Analyzer. — The American Journal of Science, New Haven, Conn. 1898.

2) Der Vorschlag, das Verfahren auf diese Funktion anzuwenden rührt von Herrn Zermelo her.

valle an, das von den ganzen Zahlen $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist, so ergiebt sich aus der Formel (9) oder (10) eine ausgeglichene Kurve, deren Gleichung:

$$\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \cos(\alpha^n x \pi)}{1 + \alpha^{2n} \gamma^2 \pi^2}$$

ganz unabhängig von den Endpunkten (a, b) des Intervalles ist, durch welches man die Ausgleichung begrenzte. Die entstandene Funktion ist — wie klein auch das Gewicht γ^2 sein mag — für alle Werte x bis zur zweiten Ableitung einschließlich stetig und man erhält diese Ableitungen aus der Reihe für η durch gliedweise Differentiation. Dagegen existiert der dritte Differentialquotient an keiner Stelle x mehr.

Die Uebertragung des Ansatzes auf mehr Veränderliche führt auf Randwertaufgaben[1]). Ich behalte mir vor bei späterer Gelegenheit dies weiter auszuführen.

---

1) Die Existenz des Minimums und damit die Lösbarkeit der zugehörigen Randwertaufgabe folgt hier sehr einfach aus den von Herrn Hilbert auf der Naturforscherversammlung in München 1899 vorgetragenen Methoden.

Ein Theorem über Determinanten.

Von

S. Kantor.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 13. Januar 1900.

In seiner Arbeit „Ueber das Pfaff'sche Problem“ [1]) hat Herr Frobenius ein Theorem über die Hauptunterdeterminanten der windschiefen und in einer späteren Arbeit „Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen“ [2]) das dazu analoge Theorem für symmetrische Determinanten gegeben. Ich werde in dieser Arbeit die beiden Theoreme durch eine rein geometrische Methode beweisen und außerdem ein Theorem über unbeschränkte Determinanten herleiten, aus dessen Beweise der Grund der Frobenius'schen Beschränkung seiner Theoreme auf symmetrische und alternirende Determinanten recht deutlich werden wird. Ich lege besonders darauf Gewicht, daß diese Theoreme nicht nur durchaus geometrisch bewiesen sind, sondern daß auch die Aufstellung des Theorems I durchaus geometrisch vor sich gieng.

Veranlassung dazu wurde mir eine während des Druckes meiner Abhandlung im 118. Bande des Crelleschen Journals hinzugefügte Fußnote (p. 89), in der gegen das Theorem II des § 5 der erst citirten Frobenius'schen Arbeit ein Einwand gemacht wird [3]). Dieser Einwand ist nun nicht stichhaltig. An die Stelle jener Fußnote treten die hier gezogenen Folgerungen.

---

1) Crelle Journ. Bd. 82. § 5.

2) Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wiss. 1894.

3) Alles, was ich sonst in den Fußnoten meiner Abhandlung ausgesprochen habe, bleibt bestehen.

Im Abschnitt II folgt ein auf die Theoreme des Abschnittes I im symmetrischen Falle basirter, neuer Beweis Hensel- Frobenius'scher Sätze über reguläre Sub- und Superdeterminanten.

I.

1. P bezeichne eine bilineare Form in je $r+1$ homogenen Variabeln und der Kürze wegen auch die durch sie dargestellte Correlation zwischen den Räumen R_r, R'_r. Es entsteht dann unter irgend zwei Räumen R_i (im R_r) und R'_i (im R'_r) vermöge P eine partiale Correlation P_0, welche man auch als ein in P enthaltene Correlation bezeichnen kann[1]). Es gibt unendlich viele Paare R_i, R'_i, wo P_i singulär ist, also mindestens einen R_0 in jedem der beiden R_i, R'_i hat, dem alle R'_{i-1} (R_{i-1}) des anderen Raumes R'_i (R_i) entsprechen. Diese Paare R_i, R'_i bilden den durch die Gleichung

$$1) \qquad \begin{vmatrix} A & p'_i \\ p_i & 0 \end{vmatrix} = 0$$

definirten R_i- R'_i- Connex. Hier ist A die zu P gehörige Matrix (a_{ik}), p_i, p'_i sind die in bekannter Ordnung geschriebenen Coordinaten je eines R_i, R'_i resp. die Coordinatenaggregate der sie bestimmenden $i+1$ Punkte. Ist in R_r, R'_r je ein R_{i-1}, R'_{i-1} gegeben, so bilden die durch R_{i-1} gehenden R_i, welchen solche R'_{i-1} vermöge 1) entsprechen, die durch den R'_{i-1} gehen, einen Kegel 2. Classe.

Solche Paare R_i, R'_i, welche 1) genügen, heißen conjugirt 1. Art. Unter ihnen sind noch solche, wo die Correlation P_i sogar je einen singulären $R_\varkappa$, $R'_\varkappa$ in R_i, R'_i besitzt. Solche Paare heißen conjugirt $(\varkappa+1)$-ter Art.[2]).

Seien nun $A_1, \ldots A_{r+1}$ und $A'_1, \ldots A'_{r+1}$ die Coordinaten-$(r+1)$-Ecke von R_r, R'_r und die durch die bilineare Form veranlaßte Zuweisung sei durch die Indices ausgedrückt.

---

1) Bei irgend einer Punkt- R_i- Verwandtschaft oder aber bigredienten Punkt- R_i- Form ist die durch den Schnitt irgend einer Mannigfaltigkeit M_k des R_r mit dieser Verwandtschaft oder Form entstehende „enthaltene" Verwandtschaft zu untersuchen und auch umgekehrt ist für gegebene Verwandtschaft in M_k dieselbe als in einer von $M_{k+\nu}$ oder $R_{k+\nu}$, die jene erhalten, eingeschlossenen, nachzuweisen. Die Sache ist ein Capitel der Theorie der höheren Functionenkörper.

2) Im speciellen Falle der quadratischen Form $\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k$ ist dieses Conjugirtsein verschiedener Arten angetroffen und dazu verwendet worden, um die nichteuklidischen mehrfachen Orthogonalitäten zu definiren, bei d'Ovidio in Memorie dei Lincei 1877: „Le proprietà metriche fondamentali dello spazio di n dimensioni."

2. Man kann direct eine Correlation P construiren, sodaß alle Paare gleichnamiger Seiten-R_i, die aus den A und A' je gebildet werden können, conjugirt 1. Art sind, ohne das P auch nur einen singulären R_0 besitze. Aber ich werde nun folgendes Theorem beweisen:

Theorem I. Wenn in einer Determinante keine Hauptunterdeterminante $(i-1)$-Ordnung verschwindet, aber alle Hauptunterdeterminanten i-ter und $(i+1)$-ter Ordnung verschwinden, so verschwinden alle Subdeterminanten des Grades i und also auch alle Subdeterminanten höherer Grade.

Es ist zuerst klar, daß die in den gleichnamigen Seiten-R_i und R'_i entstehenden Correlationen P_i Determinanten haben, welche eben die H. U. D. der Determinante $|A|$ sind, während die Correlationen, welche unter den nicht gleichnamigen Seiten-R_i und R'_i entstehen, die sämmtlichen übrigen Subdeterminanten $(i+1)$-Grades zu Determinanten haben.

a) Es sei nun angenommen, daß eine H. U. D. $(i-1)$-ten Grades $|A_{i-1}|$ nicht verschwinde, etwa die zur Correlation unter den R_{i-2} $(A_1, \ldots A_{i-2})$ und R'_{i-2} $(A'_1 \ldots A'_{i-1})$ gehörige.

Dann mögen die beiden Seiten — R_{i-1} $(A_1, \ldots A_{i-1} A_i)$ und $(A_1, \ldots A_{i-1} A_{i+1})$ nebst ihren gleichnamigen in R'_r betrachtet werden. Vermöge der Voraussetzung des Theoremes haben die Correlationen unter diesen und den ihnen gleichnamigen Seitenräumen von R'_r je einen singulären Punkt in $(A'_1, \ldots A'_{i-1} A'_i)$ und $(A'_1 \ldots A'_{i-1} A'_{i+1})$. Die beiden R_{i-1} in Betrachtung bilden einen R_i $(A_1 \ldots A_{i-1} A_i A_{i+1})$, der mit dem gleichnamigen R'_i ebenfalls eine singuläre Correlation bestimmen soll — $P^{(i-1,\, i,\, i+1)}$ — wegen der Voraussetzung des Theoremes, da ja auch die Hauptunterdeterminanten $|A_{i+1}|$ verschwinden sollen. Es schneiden also die den beiden R_{i-1} entsprechenden R_{r-i} die R'_{i-1} $(A'_1, \ldots A'_{i-1} A'_i)$, R'_{i-1} $(A'_1, \ldots A'_{i-1} A'_{i+1})$ je in einem Punkte und es schneidet aber auch der dem sie verbindenden R_i $(A_1, \ldots A_{i-1} A_i A_{i+1})$ entsprechende R'_{r-i-1} den die R'_{i-1} verbindenden R'_1 $(A'_i \ldots A'_{i-1} A_i A'_{i+1})$ in einem Punkte. Da der letztere R'_{r-i-1} der Schnitt der beiden ersteren R_{r-i} ist, so folgt in allgemeinster Weise, daß diese drei singulären Punkte entweder in einer Graden sein müssen, da sie nicht eine Ebene bestimmen dürfen, weil diese Ebene den gemeinsamen R_{i-2} der beiden R_{i-1} in einem singulären Punkte dieses R_{i-2} schneiden würde oder es muß der singuläre Punkt des R_i mit einem der singulären Punkte der R_i coincidiren. Hiefür sind nun drei Fälle möglich: 1. Man hat unter zwei R_i, R'_i eine Correlation mit zwei singulären Punkten O, O', in diesen zwei Paare von R_{i-1}, R'_{i-1} und S_{i-1}, S'_{i-1}, jedes Paar mit einer singulären Correlation und den singulären

Punkten Q, Q' und T, T'. Es könnten nun Q mit O, T mit O coincidiren, dann müssen O', Q', T' nicht in einer Graden sein. Aber dann müssen alle Subdeterminanten von $|A_{i+1}|$, welche mit einer der beiden $|A_i|$ dieselben (etwa) Zeilen gemeinsam haben, verschwinden. Dann ist also der singuläre Punkt O im Schnitt-R_{i-2} enthalten, was nicht sein darf. 2. Es könnten Q' mit O', T' mit O' coincidiren, dann müssen O, R, T nicht in einer Geraden sein. Aber dann müssen alle Subdeterminanten von $|A_{i+1}|$, welche mit einer der beiden $|A_i|$ dieselben Colonnen gemeinsam haben, verschwinden. Dann ist der singuläre Punkt O' im Schnitt-R'_{i-2} enthalten, was nicht sein darf. 3. Es könnten Q' mit O, T mit O' coincidiren, dann müssen weder O, Q, T noch O', Q', T' in einer Geraden sein. Aber dann müssen alle Subdeterminanten von $|A_{i+1}|$, welche mit einer der beiden $|A_i|$ dieselben Zeilen, oder mit der anderen dieselben Colonnen gemeinsam haben, verschwinden. Dann muß weder der singuläre Punkt O, noch O' in einem Seiten-R_{i-2} enthalten sein.

b) Tritt dieser 3. Fall ein, dann kann unser Beweis nicht fortgesetzt werden. Dieser Fall ist aber jedenfalls ausgeschlossen, wenn vermöge der Relationen, welche etwa schon unter den a_{ik} bestehen, stets O und O' in einen Punkt coincidiren müssen. Dies ist nun thatsächlich der Fall bei den symmetrischen und alternirenden Determinanten. Unser Beweis muß, um dies einfach hervortreten zu lassen, in diesem Falle die beiden $(r+1)$-Ecke am besten als coincident voraussetzen. Jener 3. Fall kann aber auch so ausgeschlossen werden, daß man überhaupt annimmt, daß alle Hauptunterdeterminanten, welche den in R_i enthaltenen gleichnamigen R_{i-1}-Seitenpaaren entsprechen, verschwinden. Dann können unter der Voraussetzung, daß alle Hauptunterdeterminanten für R_{i-2} also $|A_{i-1}|$ nicht verschwinden, die obigen Schlüsse jedesmal wiederholt werden und es müßte also O in jedem der Seiten-R_{i-1} enthalten sein, ohne in einem Seiten-R_{i-2} enthalten sein zu dürfen, was nicht möglich ist.

Wenn dann jener 3. Fall ausgeschlossen ist, dann sind also O, Q, T und O', Q', T' je in einer Geraden. Also trifft der dem R_i $(A_1, \ldots A_{i-1} A_i A_{i+1})$ vermöge P entsprechende R'_{r-i-1} den R'_i $(A'_1 \ldots A'_{i-1} A'_i A'_{i+1})$ nicht nur in einem Punkte, sondern in einer Geraden, also: diese beiden Seiten-R_i, R'_i sind sogar conjugirt 2. Art. Dies gilt weiter für irgend zwei Seiten-R_{i-1} durch den Seiten-R_{i-2} $(A_1, \ldots . A_{i-1})$, daher:

Aus den Voraussetzungen folgt zuerst, daß die sämmtlichen durch R_{i-2} $(A_1 \ldots A_{i-1})$ und R'_{i-2} $(A'_1 \ldots A'_{i-1})$ gehenden gleichnamigen

beide Verfahren zu dem gleichen Ziel. Dividiert man nun alle Elemente des so ausgefüllten Schemas durch die Summe aller A:

$$A = \sum A_x = \frac{\sin n\alpha}{\sin \alpha},$$

so erhält man das Schema der a_{ik}.

Aus der beschriebenen Beschaffenheit der Substitutionen S und T resultieren die Sätze:

Satz IX. Sowohl in der Substitution S als in der Substitution T sind alle Koefficienten positiv. Speziell in der Substitution S ist noch die Summe aller Koefficienten einer Horizontale oder Vertikale gleich 1. Ueberdies ist das System der a_{ik} symmetrisch. In einer Reihe desselben nehmen die Koefficienten immer bis zur Diagonale zu, von da aus wieder ab. Auf der Diagonale selbst liegt das Minimum der Koeffizienten in der Mitte, das Maximum an den Enden.

Hieraus folgt aber:

Satz X. Die η sind Mittelwerte der y, bei der Bildung von η_k fallen y_k und die in der nächsten Umgebung von y_k liegenden y am stärksten, die übrigen um so weniger ins Gewicht, je weiter sie von y_k abstehen. Das Maximum der η ist kleiner als das Maximum der y, das Minimum der η größer als das Minimum der y.

Satz XI. Sind alle y von gleichem Zeichen, so sind auch alle η von demselben Zeichen. Wenn alle y beständig zunehmen (abnehmen), so gilt Gleiches von den η.

4. *Einführung multiplikativer Verbindungen.* An Stelle der y und η kann man lineare Funktionen von diesen:

$$Y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1} + y_n,$$
$$H = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \cdots + \lambda_{n-1} \eta_{n-1} + \eta_n$$

einführen, die sich multiplikativ verhalten, so daß bei Ausführung der Substitution S, H bis auf einen konstanten, von der Wahl der y unabhängigen Faktor in Y übergeht. Sei

$$H - Y = \varrho \cdot H, \tag{5}$$

so müssen die λ_x der linearen homogenen Differenzengleichung 2ter Ordnung genügen:

$$\lambda_{x+1} - \left(2 + \frac{\varrho}{\gamma^2}\right) \cdot \lambda_x + \lambda_{x-1} = 0, \qquad x = 1 \ldots n$$

wo $\lambda_0 = \lambda_1$, $\lambda_{n+1} = \lambda_n = 1$ zu setzen ist. Daher muß die Determinante verschwinden:

$$D_n(\omega) = -(\omega - 2) \cdot F_{n-1}(\omega).$$

Dabei ist $\omega = \frac{\varrho}{\gamma^2} + 2$ gesetzt und $F_n(\omega)$ ist der Nenner des n^{ten} Näherungswertes in der Kettenbruchentwickelung:

$$F(\omega) = \frac{-1}{-\omega} + \frac{-1}{-\omega} + \cdots.$$

Uebrigens wird

$$F_{n-1}(\omega) = \frac{(-1)^{n-1} \sin n\varphi}{\sin \varphi},$$

wenn man

$$\omega = 2\cos\varphi$$

setzt. Hieraus folgt:

Satz XII. Die Gleichung $D_n(\omega) = 0$ hat n reelle, von einander verschiedene Wurzeln, die sämtlich zwischen -2 und $+2$ liegen:

$$\omega = 2\cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1 \ldots n-1$$

Satz XIII. Den n Werten

$$\varrho = -4\gamma^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}$$

entsprechen n multiplikative Verbindungen Y_k, die sich aus

$$(6) \quad \sin\varphi_k \cdot Y_k = \Delta y_{n-1} \cdot \sin 1\varphi_k + \Delta y_{n-2} \cdot \sin 2\varphi_k + \cdots + \Delta y_1 \cdot \sin(n-1)\varphi_k$$

ergeben, wenn man $\varphi_k = \frac{k\pi}{n}$ setzt und k von 0 bis $n-1$ wandern läßt.

Setzt man analog:

$$\sin\varphi_k \cdot H_k = \Delta\eta_{n-1} \cdot \sin 1\varphi_k + \Delta\eta_{n-2} \sin 2\varphi_k + \cdots + \Delta\eta_1 \cdot \sin(n-1)\varphi_k,$$

so hängt H_k mit dem entsprechendem Y_k durch die Gleichung zusammen:

$$H_k = \frac{Y_k}{1 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi_k}, \qquad k = 0 \cdots n-1$$

und im Besonderen ist:

$$H_0 = \eta_1 + \cdots + \eta_n = Y_0 = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$$

in Uebereinstimmung mit Satz V.

Aus der Darstellung der H durch die Y ergiebt sich:

Satz XIV. Die Schwankung des ausgeglichenen Polygonzuges ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n-1} (\Delta\eta_\varkappa)^2 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2\varphi_k H_k^2 \qquad \frac{2}{n} \sum \frac{\sin^2\varphi_k Y_k^2}{(1 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi_k)^2}$$

Rechnung zu tragen, daß infolge der Bedingungen

$$a_{pq} + a_{qp} = 0$$

die sämmtlichen H. U. D. i-ten Grades von selbst verschwinden, sobald i eine ungerade Zahl ist.

Ein Unterschied ist also nur zu machen, wenn man die durch die Theoreme II und IV gelieferten Bedingungen abzählt. Diese Anzahl ist im symmetrischen Falle $l(r-i+2)$, im alternirenden Falle $l(r-i+1)$, zusammenfassend $l(r-i+\varepsilon)$ wo $\varepsilon = 1$ oder 2 ist.

Der Sinn des Theoremes IV, wodurch es sich von den Theoremen des Herrn Frobenius unterscheidet, liegt einmal darin, daß in ihm mittelst H. U. D. i-ter und $(i+1)$-ter Ordnung über Subdeterminanten des Grades i_1 entschieden wird und $i_1 \gtreqless i$ sein kann, während bei Herrn Frobenius nur wieder über Subdeterminanten i-ten Grades entschieden wurde, dann aber auch darin, daß für die $l(r-i+\varepsilon)$ H. U. D. sehr verschiedene Configurationen innerhalb der Determinante $|A|$ genommen werden können. Für ein und dasselbe i_1 wird die Anzahl der entscheidenden H. U. D. verschieden je nach der willkürlichen Wahl von i. Sie wird am kleinsten für das größte i. Aber diese Zahl vermindert sich auch gleichzeitig in Folge der Configuration, indem nämlich mehrere der H. U. D. gleichzeitig bei mehreren der l Weisen eintreten können. Dies findet nun thatsächlich statt, wenn man die unter 2.) im Theoreme IV genannten H. U. D. für alle l Weisen als dieselbe nimmt. Dann entsteht zunächst das Theorem:

Theorem V. Wenn in einer symmetrischen oder alternirenden Determinante eine H. U. D. $(i-1)$-ten Grades nicht verschwindet, dagegen alle sie enthaltenden H. U. D. i-Grades, welche l bestimmte Colonnen enthalten und alle H. U. D. $(i+1)$-ten Grades, welche eine dieser l Colonnen enthalten, verschwinden, so verschwinden alle Subdeterminanten $(r-l+2)$-ten Grades der gegebenen Determinante.

Ich habe auch in diesem Theorem die alternirenden Determinanten mit einbezogen, obzwar die Zusammenfassung nicht so ganz natürlich ist wie bei II bis IV.

Setzt man in IV für i den Maximalwerth $i_1 - 1 = r-l+1$, so wird zunächst die Anzahl der kritischen H. U. D. $l(r-i+2) = (r-i+1)(r-i+2)$ im symmetrischen Falle und $(r-i+1)^2$ (zunächst) im alternirenden Falle. Aber die Zahl für ein allgemeines l kann noch weiter vermindert werden, wenn die Configuration so genommen wird, daß mehrere H. U. D. zweimal auftreten. Dies geschieht, wenn $l > (r-i+1):2$, sicher von selbst, es geschieht

aber auch, wenn eben wie vorhin jener Maximalwerth von i genommen wird, woraus dann das Theorem II entsteht; die Anzahl wird auf die Hälfte nämlich $(r-i+3)\,(r-i+2):2$ im symmetrischen Falle und $\begin{cases}(r-i+2)\,(r-i+1):2\\(r-i+3)\,(r-i+2):2\end{cases}$ je nachdem r ungerade oder gerade, im alternirenden Falle herabgemindert.

Diese Zahl ist aber doch nur dann das wahre Minimum, wenn in der Determinante nicht schon so viele H. U. D. niederer Grade verschwinden, daß einige der H. U. D. $(i+1)$-ten oder gar i-ten Grades von selbst verschwinden. Wenn man also in dem in der Einleitung hervorgehobenen Theoreme des Herrn Frobenius die Worte „wenn eine H. U. D..... nicht verschwindet" auffaßt als „wenn auch nur eine H. U. D. nicht verschwindet" — und auch eine briefliche Mittheilung des Verfassers an die Red. des Cr. J. über die Sache belehrt mich, daß sie wirklich so gemeint war, so ist die Anzahl nicht absolut das Minimum.

Diese Erkenntnis kann von Wichtigkeit werden, wenn es sich darum handelt, in eine fertig vorgelegte Determinante, deren Elemente Functionen von Parametern sind, wie sie in der Gruppentheorie vorkommen, diejenigen vermöge ihrer fertigen Beschaffenheit gerade nothwendigen und hinreichenden Bedingungen einzutragen, damit die Determinante auf den Rang i_1+1 herabgedrückt werde.

Nachdem ich so Herrn Frobenius' Theorem von neuem bewiesen und die Theoreme I, III und IV hinzugefügt habe, will ich noch einen Zusatz machen. Kommt es nicht auf bilineare Formen, sondern nur auf die Determinante an, so können Colonnen und Zeilen vertauscht werden, ohne daß der Gesammtmodul, der von den Subdeterminanten i-ten Grades constituirt wird, sich ändert. Damit erreichen wir eine Loslösung von der Beschränkung auf die H. U. D. Also:

Theorem VI. Wenn man in einer Determinante $|A_{r+1}|$ die $r+1$ Zeilen auf die $r+1$ Colonnen so beziehen kann, daß keine einzige der Subdeterminanten $(i-1)$-Grades, welche zu jeder ihrer Zeilen die entsprechende Colonne enthält, daß aber alle Subdeterminanten i-ten und $(i+1)$-ten Grades, welche diese Eigenschaft genießen, verschwinden, so verschwinden alle Subdeterminanten i-ten Grades der Determinante, sie ist nur vom Range $i-1$.

II.

Es seien nun die Elemente einer Determinante $|A_{r+1}|$ Functionen von x, welche nach steigenden Potenzen von $x-a$ ent-

wickelt sind. Wenn der ausgerechnete Werth einer Determinante $(x-a)^m$ als Factor enthält, aber keine höhere Potenz von $(x-a)$, so werde ich sagen: sie verschwinde für $(x-a)^m$ oder mod $(x-a)^m$. Hiebei kann m auch eine gebrochene Zahl sein.

Es mögen nun alle Subdeterminanten i-ten Grades mod $(x-a)^m$ aber nicht alle mod $(x-a)^{m'}$ verschwinden, sobald $m'>m$. Dann ist es sicher, daß es auch eine Subdeterminante $(i-1)$-ten Grades $|A_{i-1}|$ geben muß, welche nicht mod $(x-a)^m$ verschwindet, und also noch weniger dies mod $(x-a)^{m'}$ thut.

Wird nun die Determinante als symmetrisch vorausgesetzt, so kann diese Subdeterminante sogar als H. U. D. angenommen werden und es kann auf die Superdeterminanten dieser Subdeterminante das Theorem II angewendet werden, wobei noch zu beachten ist, daß für $(x-a)^{m'}$, wenn die Differenz $m'-m$ hinreichend klein ist, sicher alle Subdeterminanten $(i+1)$-ten Grades, also gewiß darunter auch die im Theoreme genannten Determinanten $(i+1)$-ten Grades $|A_{i+1}|$ verschwinden.

Also es verschwindet $|A_{i-1}|$ nicht, die genannten $|A_{i+1}|$ verschwinden sämmtlich; würden nun auch alle im Theoreme genannten Hauptsuperdeterminanten $|A_i|$ von $|A_{i-1}|$ verschwinden, so würde die Folgerung des Theorems eintreten, daß alle Subdeterminanten i-ten Grades verschwinden und zwar mod $(x-a)^{m'}$, folglich wäre $(x-a)^m$ nicht das Maximum, wie vorausgesetzt wurde. Es muß demnach unter den $|A_i|$ des Theoremes eine geben, welche — mod $(x-a)^{m'}$ — nicht verschwindet.

Sie verschwindet also für keine höhere Potenz als $(x-a)^m$, modulo welcher alle ihre Schwestern verschwinden, sie ist also unter den regulären Subdeterminanten i-ten Grades. Damit ist denn auf neue Art das Hensel'sche Theorem bewiesen: Jede reguläre Hauptsubdeterminante $|A_{i-1}|$ ist in einer regulären Hauptsubdeterminante $|A_i|$ enthalten.

Das reciproke Theorem, das bei Herrn Hensel als das ursprüngliche erscheint, während das oben bewiesene bei ihm als das reciproke hinzutritt, beweist wol am einfachsten die Determinante, deren Elemente die ersten Minoren von $|A_{n+1}|$ sind.

Aber es ist immerhin zu bemerken, daß $m'-m>1$ sein kann und also der obige Beweis eigentlich die folgende Verschärfung des Theoremes für den Fall symmetrischer Determinanten gibt:

Theorem VII. Wenn in einer symmetrischen Determinante eine Hauptsubdeterminante $(i-1)$-ten Grades nicht durch den größten gemeinsamen Theiler $(x-a)^{m+1}$ aller Subdeterminanten $(i+1)$-ten Grades theilbar ist, so ist sie in einer Hauptdeter-

minante i-ten Grades enthalten, welche ebenfalls nicht durch $(x-a)^{m_{i+1}}$ theilbar ist, ist sie nicht durch $(x-a)^{m_i+\lambda}$ theilbar, wo $(x-a)^{m_i}$ der größte gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten i-Grades und $\lambda > 0$, so ist sie in einer Hauptsubdeterminante i-ten Grades eben dieser Eigenschaft enthalten und ebenso gelten die reciproken Sätze.

III.

Auch das Theorem Kronecker's aus Cr. J. Bd. 72, wonach, wenn eine Hauptunterdeterminante A_{i-1} einer willkürlichen Determinante nicht verschwindet, aber alle sie enthaltenden Unterdeterminanten i-ten Grades verschwinden, sofort alle Unterdeterminanten i-ten Grades verschwinden, kann im Verfolge der geometrischen Raisonnements des art. I bewiesen werden. Denn es folgt aus der Voraussetzung, daß in allen Paaren Seiten-R_i, R'_i, welche durch zwei bestimmte Seiten-R_{i-1}, R'_{i-1} der beiden Coordinaten-$(r+1)$-Ecke gehen, je eine singuläre Correlation entsteht. Ein bestimmter Seiten-R_i durch den R_{i-1} gibt also mit allen Seiten-R'_{i-1} durch den R'_{i-1} eine singuläre Correlation, deren singuläre Punkte nicht in den R'_{i-1} fallen können. Der dem R_i entsprechende R'_{r-i-1} muß alle diese Punkte enthalten, muß in Folge davon in einen R_{r-i} übergehen (da es $r+1-i$ Punkte sind), also hat die Gesammtcorrelation der R_r, R'_r in R_i einen singulären Punkt, desgleichen in jedem R_i durch den Seiten-R_{i-1}, also hat sie einen singulären R_{r-i}, weshalb alle Unterdeterminanten i-ter Ordnung verschwinden.

Ueber einen Satz der Analysis Situs.

Von

A. Schoenflies (Königsberg).

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 13. Januar 1900.

Die Untersuchung der umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung von Punktmengen hat sich bisher fast ausschließlich in der Richtung bewegt, nachzuweisen, daß gewisse Abbildungen unmöglich sind, nämlich die von Gebieten verschiedener Dimensionen. Es scheint mir jedoch richtiger zu sein, die Frage mehr positiv zu wenden und direct diejenigen Eigenschaften der Punktmengen aufzusuchen, die bei der genannten Abbildung erhalten werden. Das hiermit bezeichnete Problem ist kein anderes, als die zuerst von Herrn Hurwitz in seinem Züricher Vortrag ausgesprochene Forderung, „alle Arten aequivalenter Punktmengen zu „bestimmen, sie in Klassen zu teilen, und die Invarianten dieser „Klassen aufzusuchen[1])“. Es ist auch klar, daß diese Invarianten die geometrischen Grundbegriffe, wie Curve, Fläche, Bogenlänge u. s. w. darstellen müssen. Zu dieser Aufgabe, über die bisher wenig gearbeitet ist, beabsichtige ich hier einen Beitrag zu liefern, indem ich nachweise, daß das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Fläche eines Quadrats wieder ein einfach zusammenhängendes Flächenstück ist, daß es nämlich aus der Gesamtheit aller Punkte besteht, die dem Innern einer geschlossenen Curve angehören. Dieser Satz ist für die allgemeinste stetige Abbildung bisher nirgends bewiesen worden, er läßt sich aber in exacter Form darlegen, wenn man das von Herrn C. Jordan bewiesene Theorem benutzt,

1) Verhandlungen des ersten internationalen Mathematikercongresses, Zürich, 1898, p. 102.

daß eine geschlossene Curve, die keine Doppelpunkte enthält, die Ebene in ein Aeußeres und ein Inneres teilt[1]).

2. Der Jordansche Satz lautet ausführlich folgendermaßen: Sind $x = f(t)$ und $y = \varphi(t)$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_1$ eindeutige und stetige Functionen von t, so daß zu jedem Wert von t, der zwischen t_0 und t_1 liegt, nur ein Wertepaar (xy) gehört, zu t_0 und t_1 jedoch das nämliche Wertepaar, so teilt die so definirte Punktmenge $\{xy\}$ die Ebene so in ein Aeußeres und ein Inneres, daß je zwei äußere oder je zwei innere Punkte durch einen Polygonzug verbindbar sind, der keinen Punkt (xy) enthält, während dies für einen äußeren und einen inneren Punkt nicht der Fall ist. Ich nenne die durch den Jordanschen Satz definirte Punktmenge eine geschlossene Curve, bezeichne ihre inneren Punkte als Fläche, und nenne die Curve auch den Umfang der Fläche; ferner soll diejenige Teilmenge $\{xy\}$, die zu allen Werten $t' \leqq t \leqq t''$ gehört, ein Curvenbogen oder kurz Curve heißen. Da ich im Folgenden auch das Jordansche Beweisverfahren benutze, so bemerke ich, daß es darauf hinausläuft, die Curve als gemeinsame Grenze zweier Reihen von Polygonen zu definiren

$$P_1, P_2, P_3 \ldots \text{ resp. } Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$$

von der Art, daß P_i ganz innerhalb von P_{i+1} und Q_i ganz außerhalb von Q_{i+1} liegt, und daß der Abstand eines jeden Curvenpunktes (xy) von P_ν resp. Q_ν mit wachsendem ν unter jede Grenze sinkt. Zugleich giebt es für jeden inneren Punkt der Curve stets ein Polygon P_i, so daß er innerhalb P_i und damit auch innerhalb $P_{i+1}, P_{i+2} \ldots$ liegt.

Außer dem Jordanschen Satz bedarf ich für das folgende noch der aus ihm fließenden Folgerung, daß ein Curvenbogen, der im Innern einer geschlossenen Curve verläuft und zwei ihrer Punkte verbindet, das Innere der Curve in der nämlichen Weise in zwei Gebiete zerlegt, wie dies für ein Polygon und einen dasselbe durchziehenden Linienzug gilt. Da dieser Satz ein wesentliches Beweismoment der weiteren Schlüsse bildet, so scheint es mir nötig, ihn in exacter Weise darzulegen. Dabei setze ich den analogen Satz für ein Polygon und einen in ihm verlaufenden Linienzug, der seinerseits aus dem axiomatischen Satz über die Teilung der Ebene durch die Gerade gefolgert werden kann, als bekannt voraus.

3. Sei also jetzt $\varkappa$ eine geschlossene Curve, α_1 und α_2 seien

1) Vgl. cours d'analyse, 2. Aufl. Paris 1893, Bd. I, p. 91 ff.

zwei ihrer Punkte und $\alpha_1 \alpha_2 = \eta$ ein Curvenbogen von der Art, daß jeder von α_1 und α_2 verschiedene Punkt dieses Bogens innerer Punkt für $\varkappa$ ist. Nach dem Jordanschen Beweisverfahren können wir dann auch η durch zwei convergirende Linienzüge

$$R_1, R_2, R_3 \ldots \text{ resp. } S_1, S_2, S_3 \ldots$$

approximiren, und zwar möge $R_\lambda = a'_\lambda a''_\lambda$, $S_\mu = a'_\mu a''_\mu$ sein, wo die Punkte a'_λ und a'_μ gegen α_1, ebenso a''_λ und a''_μ gegen α_2 convergiren, und alle diese Punkte entweder äußere Punkte von $\varkappa$ oder Punkte von $\varkappa$ selbst sind.

Nun sei α irgend ein von α_1 und α_2 verschiedener Punkt des Bogens η, so giebt es für ihn, wie oben erwähnt, ein Polygon P_ν, für das α innerer Punkt ist. Es giebt sogar auch noch eine gewisse Umgebung von α, die ganz innerhalb P_ν liegt, und daraus folgt weiter, daß man auch Polygonzüge R_λ resp. S_μ angeben kann, auf denen sich ebenfalls Punkte befinden, die innere Punkte für P_ν sind. Ist r ein solcher Punkt für R_λ, so giebt es auch noch rechts und links von r auf R_λ Punkte dieser Art, und es folgt in bekannter Weise, daß es für sie je einen Grenzpunkt r' und r'' giebt, der auf P_ν selbst liegt, während jeder innere Punkt des Polygonzuges $r'r''$ innerer Punkt von P_ν ist. Zwei analoge Punkte s' und s'' giebt es auch für S_μ.

Wir bezeichnen nun denjenigen Teil des Polygons P_ν, der zwischen r' und r'' liegt, durch $p_{\nu\lambda}$, ebenso den Teil zwischen s' und s'' durch $p_{\nu\mu}$, ferner den Teil von R_λ, der zwischen r' und r'' liegt, durch $r_{\nu\lambda}$, und den Teil von S_μ zwischen s' und s'' durch $s_{\mu\nu}$. Alsdann bilden $p_{\lambda\nu}$ und $r_{\lambda\nu}$ den Umfang eines Polygons $P_{\nu\lambda}$, ebenso $p_{\nu\mu}$ und $s_{\nu\mu}$ den Umfang eines Polygons $P_{\nu\mu}$, und zwar sind beide Polygone Teile von P_ν, liegen aber außerhalb von einander. Wenn jetzt ν, λ, μ über alle Grenzen wachsen, so convergirt P_ν gegen $\varkappa$, R_λ und S_μ gemeinsam gegen η, und die Punkte r' und s', ebenso r'' und s'', die sowohl auf P_ν, als auch auf R_λ resp. S_μ liegen, gegen die gemeinsamen Punkte von $\varkappa$ und η, d. h. also gegen α_1 und α_2. Es muß daher jeder innere Punkt der Curve $\varkappa$, mit Ausnahme der Punkte von η, schließlich innerhalb e i n e s der beiden Polygone $P_{\nu\lambda}$ und $P_{\nu\mu}$ fallen, woraus der bezügliche Satz folgt.

Weiter folgert man nun auch, daß jeder Curvenbogen $\beta_1 \beta_2$, der durch das Innere von $\varkappa$ geht, mit dem Bogen $\alpha_1 \alpha_2$ immer mindestens einen Punkt gemein hat, falls α_1, α_2 und β_1, β_2 sichauf $\varkappa$ gegenseitig trennen.

4. Für die Punkte des Quadrats lege ich die Auffassung zu Grunde, daß sie eine perfecte Menge bilden, und leite daher zu-

nächst einige Sätze über perfecte Mengen ab, in erster Linie den leicht ersichtlichen Satz, daß das stetige Abbild einer perfecten Menge selbst eine perfecte Menge ist. Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf umkehrbare und eindeutige Stetigkeit. Ist S die perfecte Menge und T ihr Abbild, so ist zu zeigen, daß die Menge T abgeschlossen ist, und daß jeder ihrer Punkte ein Grenzpunkt ist. Ist nun erstens t' ein Grenzpunkt von t und sind t_1, t_2, t_3 . . . solche Punkte von T, die gegen t' convergiren, so haben die entsprechenden Punkte s_1, s_2, s_3 . . . einen Grenzpunkt s', der S angehört, und aus der Definition der Stetigkeit folgt unmittelbar, daß auch t' der Menge T angehört. Ist zweitens t ein Punkt von T und s der entsprechende, so ist s, da S perfect ist, Grenzpunkt einer Punktfolge s_1, s_2, s_3 . . .; ihr entspricht eine Punktfolge t_1, t_2, t_3 . . ., die nun notwendig t zum Grenzpunkt hat, so daß t dem Punkt s entspricht. Damit ist der Satz bewiesen.

Sei jetzt $T = \{t\}$ eine beliebige ebene perfecte Menge, die ganz im Endlichen liegt, und sei c eine geschlossene Curve, innerhalb deren oder auf der jeder Punkt t von T liegt. Sei weiter m ein innerer Punkt von c, der nicht zu T gehört, so gehört zu m ein gewisser punktfreier rechteckiger Bereich, den ich hier zunächst definiren muß.

Da m kein Punkt von T ist, und T eine perfecte Menge darstellt, so giebt es auch eine endliche Umgebung von m, die ganz innerhalb c liegt und nicht zu T gehört. Sei insbesondere k_1 ein Kreis um m, dessen Inneres von Punkten t frei ist. Gehören die Punkte der Peripherie dieses Kreises k_1 ebenfalls nicht zu T, so giebt es einen ihn umschließenden Kreis k_2, dessen Inneres ebenfalls keinen Punkt t enthält, und diese Kreise haben eine Grenzlage k, dessen Radius wir ϱ nennen wollen. Zu jedem Punkt m gehört auf diese Weise ein bestimmter Radius ϱ und es folgt bereits, daß die untere Grenze der Werte ϱ für alle Punkte auf der Kreisperipherie k den Wert Null haben muß. Man beweist nun leicht, daß falls m_1, m_2, m_3 . . . eine Punktmenge mit der einen Häufungsstelle m' bilden, so daß $\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3$ . . . und $\lim \varrho_\nu = 0$ ist, der Punkt m' der Menge T angehört. Daraus folgt alsdann weiter, daß die Peripherie von k mindestens einen Punkt t enthält. Nunmehr nenne ich ϱ den Abstand des Punktes m von T.

Jetzt denke ich mir um m ein beliebiges Quadrat q, dessen Inneres ebenfalls von Punkten t frei ist. Enthält der Umfang von q keinen Punkt von T, so ist die untere Grenze von ϱ für alle Punkte des Umfangs nicht Null, und es giebt daher ein Qua-

drat q_1, das q umschließt, und dessen Inneres ebenfalls von Punkten t frei ist. Für die so bestimmten Quadrate $q, q_1 \ldots$ giebt es wieder eine Grenzlage q', auf deren Umfang mindestens ein Punkt von T liegt, während das Innere noch frei von Punkten t ist. Es kann freilich das eben betrachtete Wachstum des Quadrates q auch dadurch einen Stillstand erfahren, daß es an die Curve c anstößt.

Ich nehme nun zunächst an, daß nur eine Seite s_1 von q' einen Punkt t enthält oder an c anstößt, und zwar soll t ein innerer Punkt von s_1 sein, also kein Eckpunkt. Jetzt möge das Quadrat so weiter wachsen, daß die Seite s_1 fest bleibt. Die drei übrigen Seiten sind alsdann noch von Punkten von T frei, und zwar einschließlich der Eckpunkte, es giebt daher ein Quadrat q_1', das q' umschließt, so daß der durch s_1 abgeschnittene Teil in seinem Innern von Punkten t frei ist. Diesen rechteckigen Teil bezeichne ich durch r_1. Sind die drei beweglichen Seiten von r_1 selbst punktfrei, so giebt es für solche Rechtecke wieder eine Grenzlage r', von der Art, daß auf einer der drei beweglichen Seiten mindestens ein Punkt von T liegt, oder daß eine zweite Seite an c anstößt. Ist s_2 die bezügliche Seite, so lassen wir jetzt das Rechteck in der Weise weiter wachsen, daß s_1 und s_2 fest bleiben, während die beiden andern Seiten immer wieder einem Quadrat um m angehören. Es wird dann auch die dritte und zuletzt auch die vierte Seite fest, und wir erhalten so zu m einen rechteckigen Bereich δ, dessen Inneres von Punkten von T frei ist, während sein Umfang mindestens einen Punkt von T enthält.

Es ist nun auch leicht, die oben gemachten Beschränkungen zu beseitigen. Werden nämlich zugleich mehrere Seiten fest, so wird dadurch das Beweisverfahren nur abgekürzt, und zweitens bestimmen wir jetzt, daß, falls ein Punkt von t in eine Ecke von q' oder r' fällt, alsdann beide ihn enthaltenden Seiten fest werden.

Sind insbesondere alle Punkte des Umfangs von c zugleich Punkte von T, so enthält jede Seite von δ mindestens einen Punkt von T; auf dem Umfang von δ giebt es also immer wenigstens zwei Punkte von T. Ich bezeichne δ als den zu m gehörigen punktfreien Bereich mit Bezug auf c[1]).

---

1) Dieser Bereich hängt von der angenommenen Richtung der Quadratseiten ab. Er bildet das genaue Analogon der punktfreien Intervalle für die nirgends dichten linearen perfecten Mengen, und hat gleich diesen eine wichtige Bedeutung für die allgemeine Theorie der nirgends dichten perfecten Mengen. Hierauf gedenke ich a. a. O. näher zurückzukommen.

5. Nach diesen Vorbereitungen gehe ich nunmehr zu dem Beweis des bezüglichen Satzes über.

Sei Q das gegebene Quadrat in der xy-Ebene und seien

$$\xi = \varphi(xy) \text{ und } \eta = \psi(xy)$$

zwei für alle Punkte des Quadrats umkehrbar eindeutige und stetige Functionen, so daß jedem dieser Punkte (xy) ein Punkt $(\xi\eta)$ entspricht und umgekehrt. Alsdann folgt zunächst, daß die Punkte $(\xi\eta)$ eine perfecte Menge bilden, die ich durch $Z = \{\zeta\}$ bezeichne. Weiter folgt aus dem Jordanschen Theorem, daß dem Umfang u von Q eine geschlossene Bildcurve ω entspricht. Sei nun ε ein innerer Punkt des Quadrats und ζ sein Bildpunkt, so sieht man zunächst, daß alle Punkte ζ entweder sämtlich außerhalb oder sämtlich innerhalb von ω liegen. Denn zwei innere Quadratpunkte ε_1 und ε_2 können durch eine Gerade l verbunden werden, die u nicht trifft, und das analoge ist für einen äußeren und inneren Punkt von ω resp. für die zugehörige Bildcurve λ nicht möglich.

Mögen nun zunächst die Punkte ζ nur innere Punkte von ω seien. Zieht man alsdann innerhalb des Quadrats eine Gerade l, die zwei Punkte a und b von u verbindet, den Umfang in die beiden Teile u_1 und u_2, und die Quadratfläche f in die beiden Teile f_1 und f_2 zerlegt, so entsprechen den Punkten a, b und den Linien u_1, u_2, l die Punkte α, β resp. die Bögen ω_1, ω_2 und λ, wo λ innerhalb von ω liegt. Aus dem Jordanschen Theorem folgt alsdann, daß λ mit ω_1 und ω_2 je eine geschlossene Curve bestimmt, und die in § 3 abgeleitete Folgerung besagt weiter, daß die diesen Curven zugehörigen Flächen φ_1 und φ_2 unter sich und zu φ dieselbe Lage haben, wie f_1 und f_2 unter sich und zu f. Daraus läßt sich nun auch folgern, daß jedem inneren Punkt von f_1 resp. f_2 ein innerer Punkt von φ_1 resp. φ_2 entspricht, was mit dem vorstehenden noch nicht identisch ist. Sei nämlich ε_1 ein innerer Punkt von f_1 und ε_2 ein solcher von f_2, so wird die Verbindungslinie $\varepsilon_1\varepsilon_2$ auf u_1, l, u_2 je einen Punkt ausschneiden. Die Bildcurve, die durch ζ_1 und ζ_2 geht, schneidet ω_1, λ, ω_2 in den entsprechenden Punkten, und zwar sind ζ_1 und ζ_2 sowie λ innere Punkte von ω. Wegen der umkehrbaren Eindeutigkeit und Stetigkeit der Abbildung müssen aber diese Punkte in der nämlichen Ordnung auf einanderfolgen, wie die Punkte des Quadrats, und daraus folgt nun, daß ζ_1 innerer Punkt von ω_1 und ζ_2 innerer Punkt von ω_2 ist. Das gleiche gilt für die Zerlegung des Quadrats, resp. der Fläche φ in mehr als zwei Bestandteile.

6. Wir nehmen nun an, es könne einen inneren Punkt μ von ω geben, der der Punktmenge Z der Punkte $(\xi\eta) = \zeta$ nicht angehört, und construiren um μ einen bezüglichen punktfreien Bereich δ. Jeder innere Punkt dieses Bereichs liegt dann notwendig auch innerhalb ω, doch kann sein Umfang Punkte von ω selbst enthalten. Seien zunächst auf δ zwei Punkte ζ enthalten, die innere Punkte von ω sind, sie seien ζ_1 und ζ_2. Ihnen entsprechen dann zwei innere Quadratpunkte ε_1 und ε_2. Man lege durch sie zwei der Einfachheit halber paralle Geraden l_1 und l_2, die in den Punkten a_1, b_1, resp. a_2, b_2 des Quadrats endigen und das Quadrat in die Teilflächen f_1, f', f_2 teilen mögen. Ihnen entsprechen die Curvenbögen $\lambda_1 = \alpha_1\zeta_1\beta_1$ und $\lambda_2 = \alpha_2\zeta_2\beta_2$ und die durch sie bestimmten Teilflächen φ_1, φ', φ_2. Man beweist nun leicht, daß jeder innere Punkt von δ auch innerer Punkt von φ' ist. Es ist nämlich ζ_2 äußerer Punkt von φ_1, andrerseits läßt sich ζ_2 mit jedem innern Punkt von δ durch eine Gerade verbinden, die den Umfang von φ_1 nicht trifft, woraus die Behauptung folgt. Ebenso zeigt man, daß jeder innere Punkt von δ äußerer Punkt von φ_2 ist; er muß also innerer Punkt von φ' sein. Nun sei ε' ein innerer Punkt von f', so giebt es durch ihn eine Gerade $l' = a'b'$, die den Quadratumfang so trifft, daß a' zwischen a_1 und a_2 und b' zwischen b_1 und b_2 liegt. Ihr entspricht eine Curve $\lambda' = \alpha'\beta'$ innerhalb φ', deren Punkte sämtlich der Punktmenge Z angehören. Diese Curve muß aber gemäß (3) die Gerade $\zeta_1\zeta_2$ in einem von ζ_1 und ζ_2 verschiedenen Punkt treffen, und da diese Punkte nicht zur Menge Z gehören, so führt die Existenz des Bereiches δ resp. des Punktes μ zu einem Widerspruch.

Falls zweitens auf dem Umfang δ nur ein innerer Punkt von φ liegt, so verfahren wir wie folgt. Sei wieder ζ_1 dieser innere Punkt und ζ irgend ein Punkt des Umfangs von δ, der der Curve ω angehört, ferner seien ε_1 und ε die entsprechenden Punkte des Quadrats. Legt man nun durch ε_1 die Gerade $l_1 = a_1\varepsilon_1 b_1$, die f so in f_1 und f' teilt, daß ε auf dem Umfang von f' liegt, und zerfällt φ wieder in die entsprechenden Flächen φ_1 und φ', so muß jetzt jeder innere Punkt von δ äußerer Punkt von φ_1, also innerer Punkt von φ' sein, was wieder daraus folgt, daß auch ζ äußerer Punkt von φ_1 ist. Nimmt man dann in f' einen Punkt ε' beliebig an, und zieht durch ihn $l' = a'\varepsilon' b'$ innerhalb f', so entsteht für $\lambda' = \alpha'\zeta'\beta'$ der nämliche Widerspruch, wie im vorigen Fall.

Ist endlich jeder Punkt ζ, der auf dem Umfang von δ liegt, ein Punkt von ω, so giebt es immer mindestens zwei solcher

Punkte. Sind sie ζ_1 und ζ_2 und nehmen wir auf dem Quadratumfang zwei Punkte s' und s'' so an, daß sie sich mit s_1 und s_2 trennen, so schließt man auch hier, daß der Geraden $l = s's''$ keine Curve $\lambda = \zeta'\zeta''$ entsprechen kann, die nur Punkte ζ enthielte, da jede solche Curve innere Punkte von δ enthalten müßte.

Damit ist der Satz für den Fall vollständig bewiesen, daß kein Punkt von Z außerhalb von ω liegt.

7. Es bleibt jetzt nur noch übrig nachzuweisen, daß die Möglichkeit, es sei kein Punkt von Z ein innerer Punkt von ω, ausgeschlossen ist. Ist nämlich μ ein innerer Punkt von ω, so daß μ nicht Punkt von Z ist, so lege man eine Kugel, die die $\xi\eta$-Ebene in μ berührt und projicire die Punktmenge $Z = \{\zeta\}$ durch doppelte stereographische Projection auf die gegenüberliegende Tangentialebene. Dadurch möge jeder Punkt $\zeta = (\xi\eta)$ in einen Punkt $\zeta' = (\xi'\eta')$ übergehen. Da alle Punkte $(\xi\eta)$ im Endlichen liegen und nicht innerhalb ω, so sind jetzt auch ξ' und η' umkehrbar eindeutige und stetige Functionen von x und y. Da nun das Bild μ' des Punktes μ in den unendlichfernen Punkt der $\xi'\eta'$-Ebene fällt, der äußerer Punkt für ω' ist, so folgt leicht, daß alle Punkte $(\xi'\eta') = \zeta'$ dem Innern oder dem Umfang von ω' angehören. Nach dem vorstehenden Beweis muß also jetzt jeder innere Punkt von ω' ein Bildpunkt des Quadrats sein, resp. zur Menge $Z' = \{\zeta'\}$ gehören. Es müßte also auch jeder äußere Punkt von ω zur Menge Z gehören, also auch der unendlichferne, was gegen die vorausgesetzte Stetigkeit der Beziehung verstößt. Damit ist der behauptete Satz in allen seinen Teilen bewiesen.

8. Mit Hilfe des eben bewiesenen Satzes kann man nun auch leicht zeigen, daß es unmöglich ist, das Innere eines räumlichen oder auch n-dimensionalen Würfels auf das Innere eines ebenen Flächenstücks umkehrbar eindeutig und stetig abzubilden. Der Beweis stützt sich auf das von Herrn Cantor bewiesene Theorem [1]), daß die Menge der geschlossenen ebenen Flächen φ, die man im Innern einer geschlossenen Fläche Φ so anordnen kann, daß keine zwei Flächen φ einen inneren Punkt gemein haben, stets abzählbar ist. Dieser Satz beruht seinerseits nur auf der Thatsache, daß man jeder Fläche φ, die von einer geschlossenen Curve $\varkappa$ begrenzt wird, eine Flächenzahl zuweisen kann. Solche Flächenzahlen werden aber durch die obere Grenze der Flächenzah-

1) Math. Ann. Bd. 20 p. 117.

len der Polygone P_ν resp. durch die untere Grenze der Flächenzahlen der Polygone Q_ν geliefert[1]).

Nun sei w der Würfel und $\varkappa$ die geschlossene Curve, die ein Flächenstück φ bestimmt. Sind wieder

$$\xi = \varphi(x, y, z) \text{ und } \eta = \psi(x, y, z)$$

die Functionen, die der angenommenen umkehrbar eindeutigen und stetigen Abbildung entsprechen, so schneide man aus dem Würfel w durch eine Ebene $z = z'$ ein Quadrat q' heraus. Alsdann entsprechen den Punkten $(x'y')$ dieses Quadrats gewisse Bildpunkte (ξ', η'), deren Coordinaten umkehrbar eindeutige und stetige Functionen von x' und y' sind. Aus dem oben bewiesenen Satz folgt daher jetzt, daß dem Quadrat q' ein einfach zusammenhängendes, von einer Curve $\varkappa'$ begrenztes Flächenstück φ' in der Weise entspricht, daß jeder innere Punkt von $\varkappa'$ Bildpunkt eines inneren Punktes von q' ist, und umgekehrt. Ist q'' ein Quadrat, das durch die Ebene $z = z''$ aus w ausgeschnitten wird, so gehört dazu ein analoges Flächenstück φ''. Diese Flächenstücke φ' und φ'' haben nun wegen der Eindeutigkeit der Abbildung keinen Punkt gemein; sie liegen daher außereinander, während zugleich jeder innere Punkt von φ' resp. φ'' zugleich innerer Punkt von φ ist. Die Menge der Quadrate q', q'', . . ., die sich aus dem Würfel ausschneiden lassen, hat aber die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Continuums, während die Menge der Flächenstücke φ', φ'' . . . nach dem Cantorschen Theorem abzählbar sein müßte. Dies ist ein Widerspruch und damit die vorausgesetzte Abbildung unmöglich.

In derselben Weise läßt sich die Unmöglichkeit der bezüglichen Abbildung eines n-dimensionalen Würfels auf ein ebenes Flächenstück erweisen.

Das vorstehende Beweisverfahren ist der Verallgemeinerung auf beliebige Räume fähig. Z. B. ist es auf den R_3 ausdehnbar, sobald man erwiesen hat, daß das räumliche umkehrbar eindeutige und stetige Abbild der Fläche eines Würfels in demselben Sinn eine geschlossene Oberfläche ist, wie das bezügliche Abbild des Quadrats eine geschlossene Curve liefert. Hierauf denke ich an andrer Stelle näher zurückzukommen.

---

1) Für den Beweis braucht man übrigens nicht zu wissen, ob beide Flächenzahlen identisch sind.

Königsberg, December 1899.

Ueber die Robin'sche Methode zur Bestimmung des elektrostatischen Potentials.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von

Ernst Neumann in Halle.

Mit einer Textfigur.

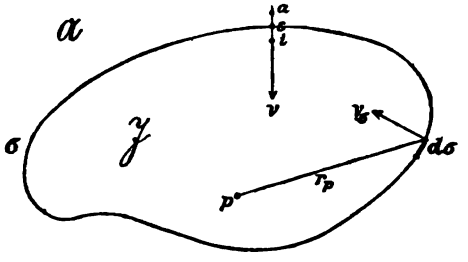
Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 13. Januar 1900.

Der verstorbene französische Mathematiker Robin gab im Jahre 1887 eine Methode an, für beliebige geschlossene Flächen das elektrostatische Potential zu bestimmen, d. h. eine Potentialfunktion des äußeren Raumes, welche auf der Fläche selber einen constanten Wert besitzt[1]). Die Convergenz seines Verfahrens konnte Robin damals nur für überall convexe Flächen beweisen, ebenso wie auch Carl Neumann ursprünglich nur für convexe Gebiete die Convergenz seiner bekannten Methode des arithmetischen Mittels verbürgen konnte, welche die Fundamentalfunktion für einen beliebigen Bereich aus ihren vorgeschriebenen Randwerten herzustellen lehrt, und somit das Dirichlet'sche Problem löst.

Ueberhaupt besteht zwischen der Robin'schen Methode und der C. Neumann'schen Methode des arithmetischen Mittels eine weitgehende Analogie. Wie C. Neumann successive Potentiale von Doppelbelegungen der begrenzenden Fläche bildet, indem er zur Dichtigkeit (Moment) jeder folgenden Belegung, (abgesehen von einem Faktor) immer das arithmetische Mittel der (bekanntlich

1) cf. Comptes rendus hebdomaires, Paris, tome 104, p. 1834. — Eine wol zuerst von Steckloff angegebene Erweiterung der Robin'schen Methode (cf. ebenda, tome 125, 1897, p. 1026) will ich im Folgenden unberücksichtigt lassen.

verschiedenen) Funktionswerte wählt, welche das Potential der vorhergehenden Belegung auf beiden Seiten der Fläche besitzt, so bildet Robin successive Potentiale von einfachen Belegungen der Fläche, derart daß er die Dichtigkeit jeder folgenden Belegung (abgesehen von einem Faktor) gleich dem arithmetischen Mittel der (bekanntlich verschiedenen) normalen Ableitungen setzt, die das Potential der vorhergehenden Belegung in inneren und äußeren Punkten besitzt. Robin bildet nämlich seine aufeinanderfolgenden Potentiale $V^{(n)}$ ausgehend von einer beliebig auf der Fläche σ vorgeschriebenen Funktion g_σ nach folgendem, an der Hand nebenstehender Figur wol leicht verständlichen, Schema:



1)
$$\begin{cases} V_p = \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma \frac{d\sigma}{r_p}, \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_i + \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_e\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int g_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_s} d\sigma = g'_s \\ V'_p = \frac{1}{2\pi}\int g'_\sigma \frac{d\sigma}{r_p}, \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_i + \left(\frac{\partial V'}{\partial \nu}\right)_e\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int g'_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_s} d\sigma = g''_s \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_i + \left(\frac{\partial V^{(n-1)}}{\partial \nu}\right)_e\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int g^{(n-1)}_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu_s} d\sigma = g^{(n)}_s \\ V^{(n)}_p = \frac{1}{2\pi}\int g^{(n)}_\sigma \frac{d\sigma}{r_p}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Diese so gebildeten Potentiale $V^{(n)}$ convergieren dann, sobald nur $\int g_\sigma d\sigma \neq 0$ ist, mit wachsendem n gegen das elektrostatische Potential — das ist der Satz von Robin.

Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so lehnt sich der ursprüngliche Robin'sche Beweis enge an den Neumann'schen Convergenzbeweis in der Methode des arithmetischen Mittels an, und beschränkt sich, wie schon gesagt, wie dieser, auf den Fall convexer Flächen. — Das Gemeinsame, das Charakteristische dieser Beweise besteht darin, daß sie im Wesentlichen das Verhalten

der aufeinanderfolgenden Funktionen allein auf der begrenzenden Fläche verfolgen.

Auf wesentlich anderem Wege hat dann in neuerer Zeit Poincaré die Allgemeingültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels, sowie auch der Robin'schen Methode, zu beweisen gesucht[1]). Er bedient sich dabei gewisser Integrale, die über den ganzen Innen- bezw. Außenraum der Fläche hinerstreckt sind, und die ich glaube als Schwarz'sche Integrale bezeichnen zu müssen, da derartige Integrale meines Wissens zuerst in einer Arbeit von H. A. Schwarz auftreten[2]), wenn es auch das unbestreitbare Verdienst von Poincaré ist, sie in die Theorie der Potentialgleichung eingeführt zu haben. — Es ist auf diesem Wege Poincaré gelungen, die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels sowie der Robin'schen Methode für einfach zusammenhängende Bereiche unter sehr weiten Voraussetzungen über die begrenzende Fläche zu beweisen.

So dankenswert dieses Resultat auch ist — beim Studium der Poincaré'schen Arbeit wird man sich des Eindrucks nicht erwehren können, daß der eingeschlagene Weg noch immer einen gewaltigen Umweg darstellt. — Wenn Poincaré beim Convergenzbeweise in der Methode des arithmetischen Mittels das Dirichlet'sche Princip von vornherein als gelöst annimmt, wenn er eine Transformation des Raumes benutzt, bei welcher die willkürlich gegebene Fläche in eine Kugelfläche übergeht, wenn er dann weiter Kugelfunktionen anwendet, und wenn endlich gar sein Schüler Le Roy, um die Gültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels auch für mehrfach zusammenhängende Bereiche zu beweisen, sogar von den Poincaré'schen Fundamentalfunktionen (Normalfunktionen) Gebrauch macht[3]), so sind damit doch wol Dinge zum Beweise herangezogen, deren Zuhilfenahme — nach Lage der Dinge heute zwar unvermeidlich — doch nicht in der Natur der Sache begründet ist, und die schwerlich zum Beweise einer so elementaren Wahrheit unentbehrlich sein dürften.

Demgemäß habe ich mich seit mehreren Jahren damit beschäftigt, die Convergenzbeweise in der Methode des arithmetischen

1) H. Poincaré: La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. Acta mathematica, Bd. 20, 1897, p. 59.

2) H. A. Schwarz: Ueber ein die Flächen kleinsten Inhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung. Zweiter Teil. — Gesammelte Abhandlungen Bd. I, p. 241.

3) Le Roy: Sur l'intégration des équations de la chaleur. Deuxième partie. — Annales de l'école normale supérieure, tome 15, 1898, daselbst p. 93—100.

Mittels nach Möglichkeit zu vereinfachen; ich habe dabei nach einander über die beiden angegebenen Richtungen, die ursprünglich von C. Neumann und die dann später von Poincaré verfolgte, nähere Untersuchungen angestellt, deren Resultate ich freilich einer ausführlicheren Publication vorbehalten muß.

Erst später habe ich dann meine Methoden auch auf das Robin'sche Verfahren angewandt, und hierüber will ich mir erlauben im Folgenden einige kurze Mitteilungen zu machen. Hier nämlich führen die Methoden schneller zu einem greifbaren Resultat, daß nämlich der Robin'sche Satz ganz allgemein gültig ist, sobald nur die betrachtete Fläche gewissen sehr weiten Voraussetzungen genügt, und zwar vermeidet der auseinanderzusetzende Beweis, im Gegensatz zu dem Poincaré'schen, die Anwendung des Dirichlet'schen Princips, sowie der Poincaré'schen Transformation des Raumes und ähnlich fernliegender Hilfsmittel, nimmt auch keine Rücksicht auf die Art des Zusammenhanges der Fläche.

§ 1. Die Schwarz'schen Integrale und ihre Verallgemeinerung.

Wir bilden auf Grund der in dem Formelsystem 1) angegegebenen Funktionen $V^{(\varkappa)}$ die folgenden Integrale:

$$2)\qquad \begin{aligned} L_{\varkappa,\lambda} &= \int_{\mathfrak{J}}\left(\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial x}+\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial y}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial y}+\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial z}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial z}\right)d\tau,\\ \bar{L}_{\varkappa,\lambda} &= \int_{\mathfrak{A}}\left(\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial x}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial x}+\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial y}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial y}+\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial z}\cdot\frac{\partial V^{(\lambda)}}{\partial z}\right)d\tau, \end{aligned}$$

das eine Mal hinerstreckt über alle Elemente $d\tau$ des Raumes $\mathfrak{J}$ innerhalb, das andere Mal des Raumes $\mathfrak{A}$ außerhalb der gegebenen Fläche σ.

Solche Integrale wollen wir alsdann kurz als Schwarz'sche Integrale bezeichnen, weil sie nach Analogie der von Schwarz in der oben citierten Arbeit eingeführten Integrale gebildet sind. — Mit diesen haben sie auch die überaus merkwürdige Eigenschaft gemein, nur von der Summe der Indices $\varkappa$ und λ abzuhängen, sodass z. B.

$$L_{\varkappa+1,\lambda-1} = L_{\varkappa,\lambda} \quad \text{und} \quad \bar{L}_{\varkappa+1,\lambda-1} = \bar{L}_{\varkappa,\lambda}$$

ist. Demgemäß kann man diese Integrale auch kürzer mit einem einzigen Index $\varkappa+\lambda$ schreiben z. B.

$$2')\qquad L_{\varkappa,\lambda} = L^{(\varkappa+\lambda)} \quad \text{und} \quad \bar{L}_{\varkappa,\lambda} = \bar{L}^{(\varkappa+\lambda)}.$$

Von diesen so eingeführten Integralen $L^{(n)}$ und $\overline{L}^{(n)}$ läßt sich dann eine Anzahl einfacher Eigenschaften beweisen, und zwar ergeben sich diese analog, wie Poincaré sie in seiner Abhandlung über die Methode des arithmetischen Mittels für die dort auftretenden Schwarz'schen Integrale (J_n und J_n') ableitet. — Uns interessiert hier vornehmlich die Eigenschaft, daß die Integrale mit
3) geradem Index, also die Integrale von der Form $L^{(2n)}$ und $\overline{L}^{(2n)}$ mit wachsendem Index dauernd abnehmen, ohne jedoch jemals negativ werden zu können, da sich bei ihnen der Integrand als Quadratsumme darstellen läßt. — Es müssen sich diese Integrale $L^{(2n)}$ und $\overline{L}^{(2n)}$ demnach bestimmten Grenzwerten nähern, oder anders ausgedrückt: *Es lassen sich durch Vergrößerung von n bei beliebigem q die Differenzen*

$$4) \qquad L^{(2n)} - L^{(2n+2q)} \quad \textit{und} \quad \overline{L}^{(2n)} - \overline{L}^{(2n+2q)}$$

unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken. —

Diese Schwarz'schen Integrale sind nun noch einer weiten Verallgemeinerung fähig. Um hierauf näher einzugehn, stellen wir neben dem Formelsystem 1) noch ein zweites System solcher Robin'scher Potentiale auf; wie wir nämlich dort, ausgehend von einer Oberflächenfunktion g_s, die Potentiale $V^{(n)}$ bildeten, so bilden wir jetzt, ausgehend von einer beliebigen anderen Funktion $\mathfrak{g}_s$, successive entsprechende Potentiale, die wir mit $\mathfrak{V}^{(n)}$ bezeichnen wollen, und bilden sodann weiter vermittelst der von einander gänzlich unabhängigen Funktionen $V^{(n)}$ und $\mathfrak{V}^{(n)}$ die folgenden Raumintegrale:

$$5) \qquad \begin{aligned} M_{\varkappa,\mathfrak{k}} &= \int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial z} \right) d\tau, \\ \overline{M}_{\varkappa,\mathfrak{k}} &= \int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial x} + \frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(\varkappa)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \mathfrak{V}^{(\mathfrak{k})}}{\partial z} \right) d\tau, \end{aligned}$$

— das erste wieder hinerstreckt über den ganzen Innen-, das zweite über den ganzen Außenraum der Fläche σ — also Integrale, welche in die Schwarz'schen Integrale $L_{\varkappa,\mathfrak{k}}$ und $\overline{L}_{\varkappa,\mathfrak{k}}$ übergehn, sobald die beiden Funktionen g_s und $\mathfrak{g}_s$ und demgemäß auch die Potentiale $V^{(n)}$ und $\mathfrak{V}^{(n)}$ mit einander identisch sind, und die wir daher wol als „verallgemeinerte Schwarz'sche Integrale" bezeichnen dürfen.

Eine nähere Untersuchung lehrt nun das höchst merkwürdige Resultat, daß auch noch diese verallgemeinerten Integrale nicht

von den Einzelwerten der Indices $\varkappa$ und $\mathfrak{k}$, sondern lediglich von der Summe $\varkappa+\mathfrak{k}$ abhängen, sodaß wir also wieder kürzer

$$5') \qquad M_{\varkappa,\mathfrak{k}} = M^{(\varkappa+\mathfrak{k})} \quad \text{und} \quad \overline{M}_{\varkappa,\mathfrak{k}} = \overline{M}^{(\varkappa+\mathfrak{k})}$$

setzen dürfen. — Doch auch noch in mancher anderen Hinsicht zeigen diese verallgemeinerten Integrale $M^{(n)}$ und $\overline{M}^{(n)}$ ein ganz ähnliches Verhalten, wie die speciellen Schwarz'schen Integrale $L^{(n)}$ und $\overline{L}^{(n)}$; so läßt sich z. B. leicht zeigen, daß auch sie sich, wenn wir n als gerade oder aber auch als ungerade Zahl immer größer werden lassen, bestimmten Grenzwerten nähern.

Doch uns interessieren hier weniger diese Integrale $M^{(n)}$ und $\overline{M}^{(n)}$ in ihrer allgemeinsten Form, als vielmehr gewisse Specialfälle von ihnen, die wir erhalten, wenn wir über eine der beiden, vorläufig willkürlich gegebenen, Oberflächenfunktionen g und $\mathfrak{g}$ eine speciellere Annahme machen.

§ 2. Einführung einer Specialisierung.

Wir markieren einen beliebigen Punkt i im Innern der Fläche σ, bezw. einen Punkt a im Raume außerhalb, und verstehen alsdann unter der Oberflächenfunktion $\mathfrak{g}$ die normale Ableitung der reciproken Entfernung von i bezw. von a, setzen also

$$\mathfrak{g}_i = \frac{\partial \frac{1}{r_i}}{\partial \nu_s} \quad \text{bezw.} = \frac{\partial \frac{1}{r_a}}{\partial \nu_s}.$$

Die diesen Funktionen entsprechenden Robin'schen Potentiale, die Funktionen also, welche an die Stelle der $\mathfrak{B}^{(n)}$ treten, wollen wir dann mit $\mathsf{V}^{(n)}$ bezeichnen, wie wir überhaupt den vorliegenden Specialfall durch griechische Buchstaben markieren wollen, denen wir dann noch zur näheren Unterscheidung den unteren Index i bezw. a beifügen werden. Wir bezeichnen demgemäss die diesem Falle entsprechenden Schwarz'schen Integrale $L^{(n)}$ und $\overline{L}^{(n)}$ d. h. die Integrale 2), wenn wir darin die V's durch die V's ersetzen, mit $\Lambda_i^{(n)}$, $\overline{\Lambda}_i^{(n)}$ bezw. $\Lambda_a^{(n)}$, $\overline{\Lambda}_a^{(n)}$, und weiter die verallgemeinerten Schwarz'schen Integrale $M^{(n)}$ und $\overline{M}^{(n)}$, d. h. die Integrale 5), wenn wir darin die $\mathfrak{B}$'s durch die V's ersetzen, mit $\mathsf{M}_i^{(n)}$, $\overline{\mathsf{M}}_i^{(n)}$ bezw. $\mathsf{M}_a^{(n)}$, $\overline{\mathsf{M}}_a^{(n)}$.

Die Integrale Λ hängen dann, außer natürlich von der Beschaffenheit der ein für alle Mal fest gegebenen Fläche σ, lediglich ab von der Lage des Punktes i bezw. a, sind also, wenn man so sagen darf, rein geometrischer Natur, während die Integrale M außer von der Lage des Punktes i bezw. a auch noch zweitens

von den Potentialen $V^{(n)}$ und damit indirekt von der willkürlich gegebenen Oberflächenfunktion g_i abhängen. — Ueber die Art dieser doppelten Abhängigkeit erhalten wir näheren Aufschluß durch Anwendung der bekannten Green'schen Sätze, die uns die folgenden beiden überaus wichtigen Formeln liefern.

$$6) \quad \frac{1}{4\pi}(M_i^{(n)} + \overline{M}_i^{(n)}) = V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)}, \quad \frac{1}{4\pi}(M_a^{(n)} + \overline{M}_a^{(n)}) = V_a^{(n+1)} - V_a^{(n)}$$

d. h. *die aus unseren verallgemeinerten Schwarz'schen Integralen gebildeten Summen* $M_i^{(n)} + \overline{M}_i^{(n)}$ *und* $M_a^{(n)} + \overline{M}_a^{(n)}$ *stellen bis auf den Faktor* 4π *die Summe, bezw. Differenz der im Punkte* i, *bezw.* a *vorhandenen Werte zweier aufeinanderfolgender Robin'scher Potentiale dar.*

Damit ist also ein direkter Zusammenhang zwischen den Funktionswerten der Robin'schen Potentiale und den zugehörigen Schwarz'schen Integralen ermittelt. — Allerdings treten hier nur die verallgemeinerten Integrale M auf, doch läßt sich jetzt auch leicht ein Zusammenhang mit den speciellen Integralen L angeben; allerdings wird dieser nicht mehr durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen dargestellt. — Wir gelangen zu ihm wol am einfachsten, wenn wir in das Integral

$$7) \quad \int_{\Im+\mathfrak{A}} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] dt,$$

dasselbe hinerstreckt über den ganzen Innen- und Außenraum der Fläche σ, die Function $F = \alpha V^{(n-1)} + \beta V'$ einführen. Dadurch geht es in

$$\alpha^2(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)}) + 2\alpha\beta(M_i^{(n)} + \overline{M}_i^{(n)}) + \beta^2(\Lambda_i'' + \overline{\Lambda}_i''), \qquad \text{bezw. in}$$

$$\alpha^2(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)}) + 2\alpha\beta(M_a^{(n)} + \overline{M}_a^{(n)}) + \beta^2(\Lambda_a'' + \overline{\Lambda}_a'')$$

über, also in quadratische Formen von α und β, die ihrer Entstehungsweise nach definit positiv sind. Es müssen mithin ihre Discriminanten positiv sein, oder es muß

$$(M_i^{(n)} + \overline{M}_i^{(n)})^2 < (\Lambda_i'' + \overline{\Lambda}_i'')(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)}) \quad \text{und}$$

$$(M_a^{(n)} + \overline{M}_a^{(n)})^2 < (\Lambda_a'' + \overline{\Lambda}_a'')(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)})$$

sein; d. i. aber nach 6):

$$(V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)})^2 < \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 (\Lambda_i'' + \overline{\Lambda}_i'')(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)}) \quad \text{und}$$

$$8) \quad (V_a^{(n+1)} - V_a^{(n)})^2 < \left(\frac{1}{4\pi}\right)^2 (\Lambda_a'' + \overline{\Lambda}_a'')(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)}).$$

Die hier auftretenden Größen $\Lambda_i' + \bar{\Lambda}_i'$ und $\Lambda_a' + \bar{\Lambda}_a'$ sind nun, wie schon oben bemerkt wurde, lediglich abhängig von der Lage des Punktes i bezw. a, und zwar läßt sich unter der Bedingung, daß die vorgelegte Fläche σ überall eine bestimmte Tan-
(B) gentialebene und eine stetige Krümmung (d. h. zwei von 0 verschiedene Hauptkrümmungsradien) besitzt, beweisen, daß diese Ausdrücke stetige Funktionen der Lage des Punktes i bezw. a sind und sogar auch noch stetig bleiben, wenn dieser Punkt in die Fläche σ selber hineinrückt. Es werden somit die Werte von $\Lambda_i' + \bar{\Lambda}_i'$ und $\Lambda_a'' + \Lambda_a''$ jedenfalls eine gewisse endliche Größe nicht überschreiten können. — Bezeichnen wir nun den größten Wert, dessen jene
9) Funktionen fähig sind, mit $(4\pi)^2 A^2$, so folgt aus 8) a fortiori:

$$
\begin{aligned}
&(V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)})^2 < A^2 (L^{(2n-2)} + \bar{L}^{(2n-2)}) \\
10) \qquad &(V_a^{(n+1)} - V_a^{(n)})^2 < A^2 (L^{(2n-2)} + \bar{L}^{(2n-2)}),
\end{aligned}
$$

wo A eine gewisse Constante bedeutet; und zwar gelten diese Formeln für alle innern bezw. äußeren Punkte der Fläche σ, jedesmal mit Einschluß der Punkte auf σ selber.

Die in diesen Formeln 10) gewonnene Beziehung zwischen Funktionswerten und Schwarz'schen Integralen stellt den eigentlichen Kernpunkt des hier auseinanderzusetzenden Beweisganges dar. — Sie findet sich ganz analog wieder in der Methode des arithmetischen Mittels; natürlich sind dort die Robin'schen einfachen Potentiale $V^{(n)}$ zu ersetzen durch die C. Neumann'schen Doppelpotentiale $W^{(n)}$, und demgemäß auch die Integrale $L^{(n)}$ und $\bar{L}^{(n)}$ durch gewisse andere Schwarz'sche Integrale (die bei Poincaré mit J_n und J_n' bezeichnet sind). — Die sich dann ergebenden, den Formeln 10) analogen Relationen sind es, welche auch den Poincaré'schen Beweis für die Allgemeingültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels wesentlich vereinfachen.

§ 3. Der Convergenzbeweis für die Robin'sche Methode.

Wenn wir nun zum eigentlichen Beweise des Robin'schen Satzes übergehn wollen, so thun wir freilich gut daran, nicht direkt an diese einfachste Form 10) der Beziehungen zwischen Funktionswerten und Schwarz'schen Integralen anzuknüpfen, sondern uns zunächst andere ähnliche Relationen abzuleiten. — Zu diesem Zweck bilden wir das Integral 7) mit Bezug auf die Funktion $F = \alpha(V^{(n-1)} - V^{(n-1+2\varrho)}) + \beta V'$, wodurch es wieder in eine de-

finit positive quadratische Form von α und β übergeht. Es ist somit auch wieder die Discriminante positiv, oder aber es ist:

$$\left(M_i^{(n)} + \overline{M}_i^{(n)} - [M_i^{(n+2q)} + \overline{M}_i^{(n+2q)}]\right)^2$$
$$< (\Lambda_i' + \overline{\Lambda}_i') \left(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)} - 2[L^{(2n-2+2q)} + \overline{L}^{(2n-2+2q)}] + L^{(2n-2+4q)} + L^{(2n-2+4q)'}\right)$$

bezw.
$$\left(M_a^{(n)} + \overline{M}_a^{(n)} - [M_a^{(n+2q)} + \overline{M}_a^{(n+2q)}]\right)^2$$
$$< (\Lambda_a' + \overline{\Lambda}_a') \left(L^{(2n-2)} + \overline{L}^{(2n-2)} - 2[L^{(2n-2+2q)} + \overline{L}^{(2n-2+2q)}] + L^{(2n-2+4q)} + L^{(2n-2+4q)'}\right)$$

und daraus folgt weiter nach 3), 6) und 9), daß umsomehr

$$\left([V_i^{(n+1)} + V_i^{(n)}] - [V_i^{(n+1+2q)} + V_i^{(n+2q)}]\right)^2 < A^2\left([L^{(2n-2)} - L^{(2n-2+2q)}] + [L^{(2n-2)} - L^{(2n-2+2q)'}]\right),$$
$$\left([V_a^{(n+1)} - V_a^{(n)}] - [V_a^{(n+1+2q)} - V_a^{(n+2q)}]\right)^2 < A^2\left([L^{(2n-2)} - L^{(2n-2+2q)}] + [L^{(2n-2)} - L^{(2n-2+2q)'}]\right)$$

ist, und zwar gelten diese Relationen, ebenso wie die Ungleichungen 10), für alle inneren bezw. äußeren Punkte, jedesmal mit Einschluß der Punkte s auf der Fläche σ selber. Für diese Punkte s auf σ gelten also beide Ungleichungen gleichzeitig, und es folgt somit unter Zuhilfenahme der Eigenschaft 4) der Schwarz'schen Integrale, daß sich durch Vergrößerung von n die beiden Ausdrücke:

$$[V_s^{(n)} + V_s^{(n+1)}] - [V_s^{(n+2q)} + V_s^{(n+1+2q)}] \text{ und } [V_s^{(n)} - V_s^{(n+1)}] - [V_s^{(n+2q)} - V_s^{(n+1+2q)}]$$

gleichzeitig, absolut genommen, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken lassen. — Das Gleiche gilt demnach auch von dem arithmetischen Mittel beider Ausdrücke, d. h. von $V_s^{(n)} - V_s^{(n+2q)}$.

Wenn sich aber die Oberflächenwerte (darunter die extremen Werte) des Potentials $V^{(n)} - V^{(n+2q)}$ durch Vergrößerung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lassen, so müssen dies überhaupt alle Werte im ganzen unendlichen Raum thun. — Dieses vorläufige Resultat unserer Ueberlegungen können wir aber, da wir die Zahl q ganz beliebig annehmen dürfen, etwas anders auch so aussprechen: Die Robin'schen Potentiale $V^{(n)}$ (vgl. 1)) mit geradem und ebenso die mit ungeradem Index n nähern sich mit wachsendem Index in allen Punkten p des ganzen unendlichen Raumes gleichmäßig je einer Convergenzfunktion. — Diese beiden Convergenzfunktionen gilt es nun noch näher zu untersuchen.

Zunächst bemerken wir zu diesem Zweck, daß die Oberflächenwerte $V_s^{(n)}$ der aufeinanderfolgenden Robin'schen Potentiale in einfacher Weise mit einander zusammenhängen; es gilt nämlich, wie hier freilich nicht näher ausgeführt werden kann, allgemein die folgende Relation:

$$V_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int V_\sigma^{(n-1)} \frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial \nu_\sigma} d\sigma,$$

oder es bestehen in der C. Neumann'schen Bezeichnungsweise die folgenden Beziehungen:

$$V_s' = \frac{1}{2\pi}\int V_\sigma (d\sigma)_s, \quad V_s'' = \frac{1}{2\pi}\int V_\sigma' (d\sigma)_s, \ldots,$$

allgemein:

$$V_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int V_\sigma^{(n-1)} (d\sigma)_s,$$

oder in Worten ausgedrückt: *Die Oberflächenwerte der Robin'schen Potentiale sind aufeinanderfolgende Neumann'sche Funktionen*[1]).

Von solchen Neumann'schen Funktionen (N. selber bezeichnet sie immer mit $f, f', f'', \ldots$) läßt sich nun aber der folgende Hilfssatz beweisen: *Convergieren alle Funktionen $f^{(n)}$ mit geradem und ebenso alle mit ungeradem Index n gleichmäßig gegen bestimmte Funktionen, so sind diese beiden Convergenzfunktionen notwendig einander gleich und zwar gleich einer Constanten.*

Die Bedingungen dieses Satzes sind aber im vorliegenden Falle erfüllt. Wir wissen von den Neumann'schen Funktionen $V_s^{(n)}$, daß sowohl die von der Form $V_s^{(2n)}$, als auch die von der Form $V_s^{(2n+1)}$ mit wachsendem Index gleichmäßig gegen je eine bestimmte Funktion convergieren. — Das ist aber nach obigem Satze nur möglich, wenn die sämtlichen Funktionen $V_s^{(n)}$ gegen eine Constante Γ convergieren. — Von dieser Constanten Γ läßt sich dann noch leicht zeigen, daß sie sicher von Null verschieden ist, sobald nur $\int g_\sigma d\sigma \neq 0$ ist. Es convergieren also in diesem Falle die Robin'schen Potentiale $V^{(n)}$ auf der Oberfläche σ und daher auch innerhalb σ gegen eine von Null verschiedene Constante Γ und außerhalb der Fläche σ gegen eine gewisse Funktion Π, von der sich nachweisen läßt, daß auch sie noch, wie die sämtlichen V's selber, den Potentialbedingungen genügt, und mit dem Randwerte Γ in stetiger Weise zusammenhängt, d. h. *diese Convergenzfunktion Π im Raume außerhalb der Fläche σ stellt das elektrostatische Potential und die Constante Γ den zugehörigen inneren Potentialwert dar*, oder aber, *wir haben unter den obigen Bedingungen* (B) *den*

1) Vgl. Carl Neumann: Ueber die Methode des arithmetischen Mittels I. Abhandlungen der Kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XIII, 1887, p. 752, oder auch: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential. Leipzig bei Teubner. 1877. p. 179.

Robin'schen Satz bewiesen, daß die aufeinanderfolgenden Robin'schen Potentiale $V^{(n)}$ (vgl. 1)) mit wachsendem n gegen das elektrostatische Potential convergieren, sobald nur $\int g_\sigma d\sigma \neq 0$ ist.

§ 4. Schlußbemerkung.

Eine Frage ist bei den obigen Ausführungen gänzlich offen geblieben: ob sich nämlich, wie die Funktionen $V_p^{(n)}$, so auch noch ihre Convergenzfunktion Π, das elektrostatische Potential, stets wirklich als Potential einer einfachen Oberflächenbelegung darstellen läßt, oder anders ausgedrückt: ob, wie die Potentiale, so auch die Dichtigkeiten der successiven Belegungen (d. s. die Funktionen $g_p^{(n)}$ des Formelsystems 1)) mit wachsendem n gegen eine bestimmte Funktion convergieren.

Für convexe Flächen hat Robin selber diese Frage beantwortet und zwar in bejahendem Sinne; auch unterliegt es nach den Untersuchungen des russischen Mathematikers Liapounoff[1]) wol keinem Zweifel mehr, daß sie ganz allgemein bejahend zu beantworten ist. Doch stützt sich Liapounoff bei seiner Beweisführung auf das sogenannte „Neumann'sche Princip", das er der citierten Poincaré'schen Arbeit entlehnt. Dadurch zieht er also indirekt zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage die oben angegebenen Poincaré'schen Hilfsmittel heran, auf deren Vermeidung im obigen Beweise ich gerade den größten Wert lege. — Freilich bin ich ohne Anwendung jener Mittel auch diese Frage zu beantworten einstweilen nicht in der Lage.

Mir scheint jedoch der Punkt einer besonderen Aufmerksamkeit wert zu sein, da seine endgültige Erledigung auch in den Untersuchungen über die Methode des arithmetischen Mittels einen großen Schritt vorwärts bedeuten würde.

---

1) A. Liapounoff: Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. — Journal de mathématiques pures et appliquées (Liouville's Journal). 1898. p. 241.

Bemerkungen über die Theorie der sogenannten thermomagnetischen Wirkungen.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 8. Februar 1900.

In der Sitzung vom 30. April 1898 habe ich eine Abhandlung[1]) „Thermodynamisches zu den Wechselbeziehungen zwischen Galvanismus und Wärme“ vorgelegt, in der ich, anschließend an eine ältere Arbeit[2]) von mir, auch die Theorie der sogenannten thermomagnetischen und galvanomagnetischen Vorgänge behandle.

Die Beobachtungen lassen schließen, daß bei diesen merkwürdigen und complicirten Erscheinungen im allgemeinen zwei Wirkungen von verschiedenem Charakter sich superponiren, eine im thermodynamischen Sinne umkehrbare und eine nicht umkehrbare. Bezieht man den Vorgang auf ein Coordinatensystem, dessen Z-Axe mit der Richtung der wirkenden magnetischen Feldstärke R zusammenfällt, und bezeichnet man mit X_1, Y_1, Z_1 die Componenten der durch ein Temperaturgefälle mit den Componenten $T_x = \partial T/\partial x$, $T_y = \partial T/\partial y$, $T_z = \partial T/\partial z$ erregten electromotorischen Kraft, mit $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{V}_1, \mathfrak{W}_1$ diejenigen der durch einen electrischen Strom mit den Componenten u, v, w erregten convectiven Wärmeströmung, so ist der Ausdruck der umkehrbaren Wirkung das Formelsystem (61), (62) der frühern Arbeit:

$$1)\qquad \begin{aligned} X_1 &= -\vartheta_1 R T_y, \quad Y_1 = +\vartheta_1 R T_x, \quad Z_1 = 0, \\ \mathfrak{U}_1 &= -\vartheta_1 R T v, \quad \mathfrak{V}_1 = +\vartheta_1 R T u, \quad \mathfrak{W}_1 = 0, \end{aligned}$$

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1898, p. 118.

2) W. Voigt, ib. 1895, p. 135.

dagegen der Ausdruck der nicht umkehrbaren Wirkung das System (63), (64):

$$2) \qquad \begin{aligned} X_1' &= -\nu\Theta' RT_y, \quad Y_1' = +\nu\Theta' RT_x, \quad Z_1' = 0, \\ \mathfrak{U}_1' &= +\nu\Theta' RT\mathfrak{v}, \quad \mathfrak{V}_1' = -\nu\Theta' RT\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{W}_1' = 0. \end{aligned}$$

Hierin bedeutet Θ_1 eine der Substanz des Körpers individuelle Function der Temperatur, die vielleicht etwas mit der Feldstärke R variirt; ν ist ein Parameter der dem Rotationscoefficienten des Hall-Effectes parallel geht, insofern die Formeln (2) eine Drehung der thermoelectrischen Kraft und der convectiven Wärmeströmung durch die Einwirkung des Magnetfeldes ausdrücken; $\Theta' = d\Theta/dT$ ist eine zweite der Substanz individuelle Function der Temperatur, die mit den Componenten X, Y, Z der gewöhnlichen thermoelectrischen Kraft in der Beziehung (44) steht

$$3) \qquad X = \Theta' T_x, \quad Y = \Theta' T_y, \quad Z = \Theta' T_z,$$

und gleichzeitig die Componenten $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ der gewöhnlichen convectiven Wärmeströmung, die sich als Thomson-Wärme äußert, nach (53) folgendermaßen bestimmt:

$$4) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{u} = u\Phi, \quad \mathfrak{v} = v\Phi, \quad \mathfrak{w} = w\Phi, \\ \Phi = \Theta - T\Theta'. \end{gathered}$$

Die von W. Thomson eingeführte „specifische Wärme der Electricität“ σ_x drückt sich bei Benutzung mechanischer Einheiten nach (54) durch Θ' aus gemäß der Formel

$$5) \qquad \sigma_x = d\Phi/dT = -Td\Theta'/dT = -Td^2\Theta/dT^2.$$

Die Anwendung dieser Formeln auf die von den Herren von Ettinghausen und Nernst[1]) für Wismuth und Wismuthlegierungen erhaltenen Resultate zeigt, daß bei jenen Körpern der umkehrbare Effect weit kleiner ist, als der nicht umkehrbare und wahrscheinlich vernachlässigt werden kann. Von dem Coefficienten ν wird vermuthet, daß er mit dem analogen Factor μ des Hall-Effectes identisch wäre, und es wird gezeigt, daß diese Vermuthung bei Wismuth durch die Beobachtung nahezu bestätigt wird.

Bei der Bearbeitung dieser Theorie für die Annalen ist die ganze Vergleichung mit der Beobachtung beseitigt worden, weil inzwischen die ersten Messungen des Herrn van Everdingen publicirt worden waren, welche zum Theil mit den früheren Resul-

1) A. v. Ettinghausen und W. Nernst, Wied. Ann. 33, 475, 1888.

taten im Widerspruch standen und zugleich die Aussicht auf eine allseitige Prüfung der Theorie eröffneten. —

Am 15. Januar dieses Jahres ist der Pariser Academie eine Arbeit von Herrn Moreau über den thermomagnetischen Effect vorgelegt worden, die in einem eigenthümlichen Zusammenhang mit meinen, Herrn Moreau unbekannten Entwickelungen steht.

Herr Moreau definirt einen Parameter σ durch die Beziehung

$$6) \qquad \frac{\Delta V}{\Delta x} = \sigma \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

für das thermoelectrische Potentialgefälle, resp. die thermoelectrische Kraft $X = -\Delta V/\Delta x$, macht die Annahme einer Hall-Drehung dieser Kraft im Magnetfelde und kommt so bezüglich des Parameters K des thermomagnetischen Effectes zu dem Werth

$$7) \qquad K = \sigma c/\varrho,$$

wobei c/ϱ den Drehungscoefficienten des Hall-Effectes darstellt. K steht dabei an derselben Stelle, die in den Formeln (2) das Product $-\nu\Theta'$ einnimmt, c/ϱ ist mit dem identisch, was ich μ genannt habe, die Vergleichung von (3) und (6) zeigt überdies, daß $-\Theta'$ bei mir in derselben Weise definirt ist, wie σ bei Herrn Moreau; hieraus folgt, daß der Ansatz des Herrn Moreau für den thermomagnetischen Effect sich von dem von mir gemachten nicht unterscheidet.

Ein Unterschied liegt aber in der beiderseitig gemachten Verwendung vor. Herr Moreau identificirt seinen Factor σ mit der W. Thomsonschen „specifischen Wärme der Electricität" σ_e. Dies ist allgemein nicht richtig, denn diese letztere Größe ist nach (5) nicht durch $-\Theta'$, sondern durch $-Td\Theta'/dT$ gegeben. Beachtet man, daß die Beobachtungen über die thermoelectrische Kraft $P_{hi} = \Theta_h - \Theta_i$ der Combination zweier Metalle h und i sich angenähert durch Functionen zweiten Grades für die Θ darstellen lassen, und setzt demgemäß

$$\Theta = l + mT + \tfrac{1}{2}nT^2$$

so erhält man

$$\sigma = -\Theta' = -(m + nT), \quad \sigma_e = -Td\Theta'/dT = -nT.$$

σ und σ_e unterscheiden sich hiernach nur um die Constante m, und die Vertauschung beider Größen durch Herrn Moreau kommt darauf heraus, daß er m neben nT vernachlässigt. Dies ist nun zwar nach den vorliegenden Beobachtungen keineswegs innerhalb

der Beobachtungsfehler zulässig; indessen sind im allgemeinen m und nT von derselben Größenordnung, sodaß das Fortlassen von m neben nT die Größenordnung von σ nicht ändert. Bei der großen Unsicherheit der in Betracht kommenden Zahlen wird man, so lang es sich nur um Fragen der Größenordnung handelt, gegen ein solches Verfahren, nichts Erhebliches einwenden; es erscheint dann aber die überraschende Uebereinstimmung der Theorie mit der Beobachtung, die Herr Moreau bei einigen Metallen findet, als einigermaßen zufällig, und eine exacte Prüfung der Theorie wird den Unterschied zwischen σ und σ_z in Betracht ziehen müssen.

An sich scheint es mir nicht wahrscheinlich, daß die thermomagnetischen Wirkungen allein von den beiden Constanten des Hall- und des Thomson-Effectes abhängen sollten. Alle neueren Beobachter sind z. B. darüber einig, daß bei ihnen die Drehung der Isothermen im Magnetfelde, auf die auch ich bei einer späteren Gelegenheit Rücksicht genommen habe, und die mit jenen beiden Effecten nicht zusammenzuhängen scheint, eine bedeutungsvolle Rolle spielt.

Sollte sich die Moreau'sche Formel (7) weitgehend bestätigen, so würde sie für die Theorie der betreffenden Vorgänge eine sehr wichtige Directive bieten. Ein Widerspruch mit den von mir gemachten Ansätzen wäre durch ein solches Resultat übrigens noch nicht nothwendig gegeben, da der Ausdruck (1) für den umkehrbaren Antheil der electromotorischen Kraft noch eine verfügbare Function Θ_1 enthält. Man gelangt direct zu der Moreau'schen Formel, wenn man diese Function gleich $\nu T^2 d(\Theta'/T) dT$ annimmt, was natürlich der näheren Begründung bedürfte. Der andere sich bietende Ausweg, nicht die ganze thermoelectrische Kraft, sondern nur einen Theil durch die Wirkung des Magnetfeldes gedacht anzunehmen und demgemäß in (2) Θ' mit $Td\Theta'/dT$ zu vertauschen, die umkehrbare Wirkung (1) aber zu vernachlässigen, erscheint wenig empfehlenswerth.

Göttingen, Februar 1900.

Ueber die Bewegung eines Punktsystemes bei Bedingungsungleichungen.

Von

E. Zermelo.

Vorgelegt von D. Hilbert durch den vorsitzenden Secretär in der Sitzung vom 3. Februar.

In seinem Vortrage vom 3. Juli v. J. behandelt Herr A. Mayer (Berichte d. k. Sächs. Ges. d. Wissensch. z. Leipzig 1899, S. 224—244) im Anschluß an eine ältere Arbeit von Ostrogradski (1834) das Problem, die Differentialgleichungen für die Bewegung eines reibungslosen Punktsystemes aufzustellen, das Bedingungsungleichungen unterworfen ist. Hier giebt er eine Methode, in jedem solchen Falle mit Hilfe des Gauß'schen „Princips des kleinsten Zwanges" die Beschleunigungen aller Punkte zu finden, wenn ihre augenblicklichen Lagen und Geschwindigkeiten gegeben sind. Doch ist diese Methode nur eine indirekte: es sind immer eine Anzahl von Fällen zu unterscheiden, je nach deren Eintreten die Schlußformeln verschieden ausfallen; welcher dieser Fälle aber gerade verwirklicht ist, kann im Allgemeinen erst aus dem Resultate entschieden werden, sodaß in der Regel immer erst eine Reihe von Ansätzen durchprobirt werden muß, bevor man einen findet, der allen Bedingungen genügt. Bei diesem Verfahren bedarf es indessen noch des Nachweises, daß eine solche Lösung immer existirt und die einzige ist, damit man überzeugt sein kann, daß das Gaußsche Prinzip zur Bestimmung der wirklichen Bewegung auch ausreicht. Dieser Eindeutigkeitsbeweis, der von Herrn A. Mayer nur für die einfachsten Fälle gegeben wird, in denen nicht mehr als zwei Bedingungsungleichungen in Betracht kommen (a. a. O. S. 237), ist der Gegenstand meiner vorliegenden Mitteilung, und gelingt

sehr leicht auf Grund der Bemerkung, auf deren Wichtigkeit ich durch Herrn Prof. Hilbert aufmerksam gemacht wurde, daß die Nebenbedingungen des Minimumsproblems in Bezug auf die Unbekannten, die Beschleunigungen, sämtlich linear sind.

Die Coordinaten aller Punkte des Systemes bezeichnen wir der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots x_n$, die zugehörigen Massen mit $m_1, m_2, \ldots m_n$ und die entsprechenden Componenten der äußeren Kräfte, die nur von den Coordinaten x_i abhängen sollen, mit $X_1, X_2, \ldots X_n$. Dann erfordert das Gaußsche Princip des kleinsten Zwanges, daß für jedes gegebene System (x_i, x_i') der Coordinaten und Geschwindigkeiten der Ausdruck

$$(1) \qquad P \equiv \sum_1^n m_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 \equiv P\,(x_i'')$$

durch Wahl der Beschleunigungen x_i'' zu einem Minimum gemacht werden soll, während die Coordinaten x_i zu allen Zeiten einer Anzahl von Ungleichungen genügen:

$$(2) \qquad f_1\,(x_i) \leqq 0,\ f_2\,(x_i) \leqq 0, \ldots$$

Wie nun Herr Mayer a. a. O. zeigt, brauchen wir für einen gegebenen Bewegungszustand (x_i, x_i') nur diejenigen r Ungleichungen $f_\mu \leqq 0$ in Betracht zu ziehen, für welche im Augenblicke nicht nur die Functionen f_μ selbst sondern auch ihre nach der Zeit genommenen totalen ersten Ableitungen f_μ' gerade verschwinden, also die $2r$ Gleichungen bestehen:

$$(3) \qquad f_\mu\,(x_i) = 0,\ f_\mu'\,(x_i, x_i') = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r),$$

und die Bedingungen (2) erfordern dann, wenn sie allgemein gültig bleiben sollen, daß auch

$$(4) \qquad f_\mu''\,(x_i'') \equiv f_\mu''\,(x_i, x_i', x_i'') \equiv \sum_1^n \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} x_i'' + F_\mu\,(x_i, x_i') \leqq 0.$$

Ist uns also ein System von Größen (x_i, x_i') gegeben, das den Bedingungen (3) genügt, so sollen die Unbekannten x_i'' unter den Nebenbedingungen (4) den Ausdruck P zu einem Minimum machen.

Nach der Methode von Mayer geschieht die Bestimmung dieses Minimums folgendermaßen. Wir nehmen an, für einen Teil der Functionen f_μ möge in den Bedingungen (4) das Gleichheits-, für die übrigen das Ungleichheitszeichen gelten, so daß wir haben:

$$(4a) \qquad f_\mu''\,(x_i'') = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots k)$$

$$(4b) \qquad f_\mu''\,(x_i'') < 0 \qquad (\mu = k+1, k+2, \ldots r).$$

Dann müssen im Falle des Minimums die Beschleunigungen von

der Form sein

$$m_i x_i'' = X_i - \sum_1^k{}^{\mu} \lambda_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{5}$$

und die k Factoren λ_μ lassen sich aus den k Gleichungen (4a) welche in Bezug auf die x_i'' und nach der Substitution (5) auch in Bezug auf die λ_μ linear sind, eindeutig bestimmen, vorausgesetzt, daß ihre Determinante Δ_k nicht verschwindet (vgl. Mayer a. a. O. S. 234). Diese Werte λ_μ müssen nun, wenn die gemachte Annahme über die Verteilung der Functionen f_μ in die Classen (4a) und (4b) richtig sein soll, selbst sämtlich $\geqq 0$ sein (Mayer s. 236) und müssen außerdem vermöge der Substitution (5) noch die $r-k$ Bedingungen (4b) befriedigen. Ist aber eine solche Lösung gefunden, so ist sie auch die einzige und das Problem ist vollständig gelöst. Denn dann nimmt der Ausdruck P, wie ich zeigen werde, in der That einen kleineren Wert an als für alle anderen Wertsysteme x_i'', die den Bedingungen (4) genügen, womit die Möglichkeit weiterer secundärer Minima ausgeschlossen und die Eindeutigkeit des Problemes bewiesen ist.

Ersetzt man nämlich im Ausdrucke P jedes x_i'' durch $x_i'' + \omega_i$, so erhält man

$$\begin{aligned} P(x_i'' + \omega_i) &\equiv \sum_1^n{}^{i} m_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right)^2 + 2 \sum_1^n{}^{i} m_i \omega_i \left(x_i'' - \frac{X_i}{m_i}\right) + \sum_1^n{}^{i} m_i \omega_i^2 \\ &\equiv P(x_i'') + 2 P_1(x_i'', \omega_i) + P_2(\omega_i). \end{aligned} \tag{6}$$

Nun ist aber auf Grund von (5)

$$\begin{aligned} P_1(x_i'', \omega_i) &= -\sum_1^n{}^{i} m_i \omega_i \sum_1^k{}^{\mu} \frac{\lambda_\mu}{m_i} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \\ &= -\sum_1^k{}^{\mu} \lambda_\mu \left[f_\mu''(x_i + \omega_i) - f_\mu''(x_i) \right] \geqq 0, \end{aligned}$$

weil wegen (4)

$$f_\mu''(x'' + \omega_i) = f_\mu''(x_i'') + \sum_1^n{}^{i} \omega_i \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i} \leqq 0$$

und nach (4a) für $\mu \leqq k$ $f_\mu''(x_i'') = 0$ sein soll, während alle λ_μ positiv sind. Daher ist, wie behauptet,

$$P(x_i'' + \omega_i) \geqq P(x_i'') + P_2(\omega_i) > P(x_i''),$$

sofern nicht alle Größen ω_i gleichzeitig verschwinden.

Ich füge noch einen zweiten Beweis für die Existenz eines einzigen Minimums hinzu, der eine besonders einfache geome-

trische Deutung zuläßt, wenn wir zunächst den Ausdruck P durch die lineare Substitution

$$\sqrt{m_i}\, x_i'' - \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

auf die Form bringen

$$(1)' \qquad P \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \equiv P(\xi_i),$$

während die Bedingungen (4) in die folgenden übergehen

$$(4)' \quad \varphi_\mu(\xi_i) \equiv a_{\mu 1}\xi_1 + a_{\mu 2}\xi_2 + \cdots + a_{\mu n}\xi_n + A_\mu \leqq 0. \quad (\mu = 1, 2, \ldots r).$$

Hier sind die r Functionen φ_μ wieder linear in Bezug auf die neuen Unbekannten ξ_i, repräsentiren also ein System von $(n-1)$dimensionalen Ebenen $\varphi_\mu = 0$, die aus dem $n$dimensionalen Raume der Coordinaten ξ_i einen Raumteil R' ausschneiden, der den Bedingungen (4)' genügt. Die Aufgabe ist nun, die quadratische Form $P = \rho^2$ unter den Bedingungen (4)' oder den Abstand ρ des Coordinatenanfangspunktes von einem Punkte (ξ_i) des Raumteiles R' zu einem Minimum zu machen. Einen kürzesten Abstand ρ_0 vom Punkte O muß R' jedenfalls besitzen, weil die „untere Grenze" einer stetigen Function in einem continuirlichen Gebiete immer zugleich auch ein Minimum darstellt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß dieses Minimum $P_0 = \rho_0^2$ nur an einer Stelle von R' angenommen wird, und dies folgt einfach aus dem Umstande, daß der Raumteil R' einfach zusammenhängend und überall convex ist. Liegen nämlich zwei Punkte (ξ_i') und (ξ_i'') auf derselben Seite einer der begrenzenden Ebenen, sodaß sie einer der Bedingungen (4)' genügen, so gilt das gleiche auch von allen zwischen ihnen liegenden Punkten ihrer Verbindungsgeraden, und ebenso verhält es sich auch mit der Gesamtheit dieser r Bedingungen. Gehören also beide Punkte A', A'' dem Gebiete R' an, so liegt auch diese Verbindungsstrecke $A'A''$ ganz im Innern, und wenn beide den gleichen Abstand $\rho' = \rho''$ von O haben, so haben alle Punkte zwischen A' und A'' kleinere Abstände und ρ' kann nicht der kürzeste sein. Dasselbe gilt umsomehr, wenn der Abstand ρ'' von A'' schon kürzer ist als der von A', und dann giebt es auf der genannten Verbindungslinie in beliebiger Nähe von A' wieder Punkte mit Abständen $< \rho'$. Es kann also auch keine secundären Minima geben, sondern nur ein einziges absolutes Minimum $P_0 = \rho_0^2$, das nur an einer einzigen Stelle angenommen wird.

Analytisch gestaltet sich dieser Nachweis folgendermaßen. Genügen beide Wertsysteme (ξ_i') und (ξ_i'') den Bedingungen (4)', so

ist auch für alle Systeme

$$\xi_i' = (1-\vartheta)\,\xi_i + \vartheta\,\xi_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n;\ 0 < \vartheta < 1)$$

$$\varphi_\alpha(\xi') = (1-\vartheta)\,\varphi_\alpha(\xi) + \vartheta\,\varphi_\alpha(\xi') \leqq 0.$$

Ferner wird dann

$$P(\xi') = (1-\vartheta)^2 P(\xi) + \vartheta^2 P(\xi') + 2\vartheta(1-\vartheta) P_1(\xi, \xi'),$$

wo $P_1(\xi, \xi')$ ähnlich wie in (6) eine bilineare Form (die Polarform von P) ist, also, wenn

$$\varrho^m = P(\xi) \leqq P(\xi') = \varrho'^m$$

angenommen wird,

$$P(\xi_\vartheta) = P(\xi') - \vartheta[P(\xi) - P(\xi')] - \vartheta(1-\vartheta)[P(\xi') + P(\xi) - 2P_1(\xi, \xi')]$$
$$< P(\xi'),$$

weil

$$P(\xi') + P(\xi) - 2P_1(\xi, \xi) \equiv P(\xi' - \xi)$$

als definite quadratische Form der n Variablen $\xi_i' - \xi_i$ positiv ist.

Ueber das Alter des norddeutschen Wälderthon's (Wealden).

Von

A. von Koenen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 17. Februar 1900.

Schon Roemer und Dunker hatten erkannt, daß der norddeutsche Wälderthon an die Grenze zwischen der Jura- und der Kreideformation zu stellen und gleichaltrig mit dem englischen Wealden ist. Ihnen folgte unter Anderen auch K. von Seebach, welcher auch entschieden die Ansicht vertrat, daß der Wälderthon als unterstes Glied der Kreideformation anzusehen sei, und auch 1871 (Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges. S. 777) eine kurze Notiz veröffentlichte, daß bei Delligsen bei Alfeld „Neokom- und Wealden-Fossilien (Schalen von Unionen und Belemniten)" zusammen vorkämen. Dieses Vorkommen schilderte dann G. Böhm in seiner Dissertation („Beiträge zur geognostischen Kenntnisse der Hilsmulde", Göttingen 1877) so genau und sorgfältig, daß eine nähere Prüfung möglich wurde, über die ich am Schluß berichten werde.

Die Angabe von K. von Seebach wurde aber später als Beweis für das Kreide-Alter des Wealden von verschiedenen Autoren angeführt, während andere den Wälderthon noch zur Juraformation gestellt wissen wollten, zum Theil, weil er eine Süßwasserbildung sei, ebenso wie unsere obersten Juraschichten, und weil die Kreide mit reinen Meeresbildungen begänne. Diese Ansicht wurde besonders von Struckmann sehr entschieden in seinen Arbeiten vertreten und auch damit begründet, daß in dem Tiefbauschacht bei Barsinghausen am Deister mit Süßwasserformen des Wealden auch eine marine Bivalvenart des oberen Jura vorkäme. (Jahrb. d. kgl. preuß. geolog. Landesanstalt für 1889).

In Folge dessen erklärte dann O. C. Marsh, daß die Wirbelthier-Fauna des Wealden weit mehr derjenigen der Juraformation, als der der Kreide gliche, und von anderer Seite wurde angegeben, die Flora des Wealden sei weit ähnlicher der des Jura, als der der Kreide. Daß Beides nicht zutrifft, habe ich vor einigen Jahren schon (Zeitschr. d. deutsch. geolog. Ges. 1896 S. 713) hervorgehoben, und C. Gagel sowohl, als auch G. Müller (Jahrb. d. kgl. preuß. geol. Landesanstalt für 1893 und für 1895) hatten sich entschieden unter Anführung von wichtigen Thatsachen gegen die Anschauungen Struckmanns erklärt.

Auf Grund der Angaben Struckmanns hatten aber auch einzelne Autoren den norddeutschen Wealden für älter, als den englischen gehalten.

Durch die gekrönte Preisschrift von W. Koert „Geologische und paläontologische Untersuchung der Grenzschichten zwischen Jura und Kreide auf der Südwestseite des Selter“ (Göttingen 1898) wurde aber nachgewiesen, daß zunächst im Gebiete der Hilsmulde, westlich von Alfeld, der Wälderthon überall auf Mergeln und Kalken liegt, welche durch ihre Fauna sich mit voller Bestimmtheit als Aequivalente des „Oberen Purbeck“ erweisen, einer brackischen und Süßwasserbildung, die sowohl im schweizerischen und französischen Jura, als auch im südlichen Frankreich und in England in großer Verbreitung bekannt ist und hier ebenfalls unter dem Wealden liegt. Ihre Verbreitung und ihr Alter ist aber in neuester Zeit besonders durch die sorgfältigen Untersuchungen von Glangeaud festgestellt worden.

Im vorigen Jahre habe ich nun gefunden, daß auch am Osterwald über dem Serpulit und unter dem Wealden Mergel und kalkige Gesteine anstehen, welche dem oberen Purbeck zuzurechnen sind; Fossilien habe ich darin freilich noch nicht aufgefunden, aber das Gestein gleicht ganz demjenigen, welches nördlich vom Hils in der Gegend von Wallensen und Thüste auftritt. Eine Aufgabe der nächsten Jahre wird es aber sein, die Verbreitung und Entwicklung des Purbeck auch in den übrigen Wealden-Bezirken, am Deister etc. nachzuweisen.

Die darunter liegenden Schichtenfolgen, der „Serpulit“ und die „Münder Mergel“ sind nun von den Einen als mittleres und unteres Purbeck bezeichnet worden, von Anderen aber, namentlich von Glangeaud, als oberes Portlandien; keinenfalls sind es Süßwasserbildungen, wie von Manchen angenommen wurde, denn die Münder Mergel enthalten Gypslager, Steinsalz-Pseudomorphosen und Salzquellen und einzelne marine Mollusken, eine verkümmerte Fauna, wie sie in iso-

lirten, Salz-reichen Meerestheilen ja aufzutreten pflegt. Der Serpulit ist aber ein marines Conglomerat, dessen Fauna an Sauriern und Fischen, besonders Pycnodonten, der des Portland und Kimmeridge mindestens sehr ähnlich ist. Daß darin stellenweise Cyrenen etc. auftreten, beweist nicht, daß er eine Süßwasserbildung sei, ist doch Cyrena rugosa schon in den rein marinen Schichten des Kimmeridge sehr verbreitet, so daß wir annehmen müssen, daß die Gattung Cyrena damals noch eine marine Gattung war. Uebrigens habe ich im vergangenen Herbst im Serpulit der „Thüster Burg" einen, wenn auch beschädigten Belemniten gefunden, welcher durch die tiefe Ventralfurche sich nahe an den B. absolutus des obersten russischen Jura anschließt, und Austern, Pecten und andere Meeresmollusken kommen bei Thüste und an anderen Orten ebenfalls vor.

Es sei hier auch hervorgehohen, daß bei Boulogne-sur-Mer über dem Portlandien Thone mit Sandsteinen und Eisenstein-Concretionen liegen, welche von E. Pellat und Gosselet als Wealdien gedeutet wurden, während Munier-Chalmas und Andere sie für Aquilonien erklärten. Im oberen Portland fand dort aber E. Pellat in einem kieseligen Kalk mit Trigonia Edmundi, Cardium dissimile etc. auch Arten des Purbeck; darunter folgen Sande und Kalksandsteine mit Trigonia gibbosa, T. incurva etc., in welchen Munier-Chalmas drei Bänke mit Trigonia gibbosa unterschied; auf die mittlere derselben folgen aber Sande und knollige Kalksandsteine mit Serpula coacervata, Trigonia radiata etc., welche er dem Serpulit gleich stellte. (E. Pellat, quelques mots sur le terrain Jurassique supérieur du Boulonnais à l'occasion du XXVII e Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des Sciences à Boulogne-sur-Mer. Août 1899. Avignon 1899). Die Schichtenfolgen lassen sich also sehr wohl mit den unsrigen parallelisiren, abgesehen davon, daß das Purbeck zum Portland gerechnet wurde.

Ueber dem Wealden liegt nun gewöhnlich Thon mit Oxynoticeras heteropleurum Neum. et Uhlig, O. Gevrilianum d'Orb. und ähnlichen Formen, und darüber folgt ein Horizont mit Saynoceras verrucosum d'Orb. und Holcostephanus-Arten, wie H. psilostomus Neum. et Uhlig, also 2 Stufen, welche dem mittleren und oberen Valanginien Südfrankreichs und des französischen und schweizerischen Jura entsprechen, und dann die Stufen mit Hoplites amblygonius Neum. et Uhlig und mit H. radiatus, also das Hauterivien.

Der norddeutsche Wälderthon kann daher nur der alleruntersten Kreide, dem Valanginien inférieur parallelisirt werden, zu welchem Kilian sicherlich mit Recht die Berrias-Stufe, das "Berriasien" stellte.

Wenn nun auf diese Weise das Alter des Wälderthon's sicher festgelegt ist, so kann ich doch nicht unerwähnt lassen, daß die vorstehend angeführte Angabe K. v. Seebachs über das Zusammenvorkommen von Neokom- und Wealden-Fossilien wohl auf einem Irrthum beruht. Es stehen nämlich dicht neben seinem Fundorte nördlich von Delligsen die oberen Purbeckschichten an, im Bachbette selbst aber dunkle Thone mit zahlreichen Cypris etc., welche keinenfalls dem oberen Wealden angehören, und über den Thonen liegen Kies und Gerölle, in denen auch Bruchstücke vom Belemniten und Ammoniten vorkommen. Es liegt daher die Annahme nahe, daß die von K. von Seebach und Böhm gefundenen Belemniten nicht aus anstehendem Gestein stammten, sondern verschwemmt waren, und in der That sind denn auch die in dem hiesigen geologischen Museum aufbewahrten Exemplare stark beschädigt und abgerieben. Böhm scheint dies übrigens schon halb vermuthet zu haben, da er sich etwas vorsichtig über das Vorkommen in einer Fußnote äußerte.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei von W. Fr. Kaestner.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen

aus dem Jahre 1899.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1899.

Inhalt.

Bericht des abtretenden Sekretärs der Gesellschaft über das Geschäftsjahr 1898/99 . . . . . S. 1

Verzeichnis der im Jahre 1898/99 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen . . . . . „ 6

Wedekind-Stiftung. — de Lagarde-Stiftung. — Stiftung der Freunde Paul de Lagarde . . . . . „ 11

H. Lietzmann, Bericht über die mit Unterstützung der K. G. d. W. vorgenommene Catalogisirung der Catenenhandschriften . . . . „ 12

P. Kehr, Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden . . . . . „ 16

F. Klein, Ueber den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken . . . „ 19

R. Pietschmann, Wörterbuch der ägyptischen Sprache. Bericht über das Geschäftsjahr 1898 . . . . . „ 24

F. Leo, Bericht über den Thesaurus linguae latinae . . . . . „ 26

Preisvertheilung . . . . . „ 31

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1899 . . . . . „ 35

Beneke'sche Preisstiftung . . . . . „ 44

Verzeichnis der im Jahre 1898 eingegangenen Druckschriften . . . . „ 47

J. Wellhausen, Ferdinand Wüstenfeld . . . . . „ 79

trische Deutung zuläßt, wenn wir zunächst den Ausdruck P durch die lineare Substitution

$$\sqrt{m_i}\, x_i'' - \frac{X_i}{\sqrt{m_i}} = \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

auf die Form bringen

$$(1)' \qquad P \equiv \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 \equiv P(\xi_i),$$

während die Bedingungen (4) in die folgenden übergehen

$$(4)' \quad \varphi_\mu(\xi_i) \equiv a_{\mu 1}\xi_1 + a_{\mu 2}\xi_2 + \cdots + a_{\mu n}\xi_n + A_\mu \leqq 0. \quad (\mu = 1, 2, \ldots r).$$

Hier sind die r Functionen φ_μ wieder linear in Bezug auf die neuen Unbekannten ξ_i, repräsentiren also ein System von $(n-1)$dimensionalen Ebenen $\varphi_\mu = 0$, die aus dem $n$dimensionalen Raume der Coordinaten ξ_i einen Raumteil R' ausschneiden, der den Bedingungen (4)' genügt. Die Aufgabe ist nun, die quadratische Form $P = \rho^2$ unter den Bedingungen (4)' oder den Abstand ρ des Coordinatenanfangspunktes von einem Punkte (ξ_i) des Raumteiles R' zu einem Minimum zu machen. Einen kürzesten Abstand ρ_0 vom Punkte O muß R' jedenfalls besitzen, weil die „untere Grenze" einer stetigen Function in einem continuirlichen Gebiete immer zugleich auch ein Minimum darstellt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß dieses Minimum $P_0 = \rho_0^2$ nur an einer Stelle von R' angenommen wird, und dies folgt einfach aus dem Umstande, daß der Raumteil R' einfach zusammenhängend und überall convex ist. Liegen nämlich zwei Punkte (ξ_i') und (ξ_i'') auf derselben Seite einer der begrenzenden Ebenen, sodaß sie einer der Bedingungen (4)' genügen, so gilt das gleiche auch von allen zwischen ihnen liegenden Punkten ihrer Verbindungsgeraden, und ebenso verhält es sich auch mit der Gesamtheit dieser r Bedingungen. Gehören also beide Punkte A', A'' dem Gebiete R' an, so liegt auch diese Verbindungsstrecke $A'A''$ ganz im Innern, und wenn beide den gleichen Abstand $\rho' = \rho''$ von O haben, so haben alle Punkte zwischen A' und A'' kleinere Abstände und ρ' kann nicht der kürzeste sein. Dasselbe gilt umsomehr, wenn der Abstand ρ'' von A'' schon kürzer ist als der von A', und dann giebt es auf der genannten Verbindungslinie in beliebiger Nähe von A' wieder Punkte mit Abständen $< \rho'$. Es kann also auch keine secundären Minima geben, sondern nur ein einziges absolutes Minimum $P_0 = \rho_0^2$, das nur an einer einzigen Stelle angenommen wird.

Analytisch gestaltet sich dieser Nachweis folgendermaßen. Genügen beide Wertsysteme (ξ_i') und (ξ_i'') den Bedingungen (4)', so

Die Göttingischen Gelehrten Anzeigen sind in der bisherigen Weise weitergeführt worden.

Ueber den Schriftenaustausch, der auch in diesem Jahre eine beträchtliche Erweiterung erfahren hat, gibt die weiterhin abgedruckte Zusammenstellung Auskunft. Diese soll zugleich als Empfangsbescheinigung dienen, wo eine solche nicht auf besonderen Wunsch sofort nach Empfang der Zusendung gegeben wurde.

Zum Zwecke wissenschaftlicher Unternehmungen hat die K. Gesellschaft folgende Bewilligungen aus den ihr zur Verfügung stehenden Mitteln gemacht:

Herrn Th. Des Coudres für Untersuchungen über Kathodenstrahlen	1000 Mk.
Herrn F. Klein für Reisen im Interesse der Mathematischen Encyklopädie	500 „
Herrn N. Bonwetsch für Untersuchungen auf dem Gebiete der Catenenlitteratur	800 „
als erste von zwei gleichen Raten.	
Ihrer Commission für Herausgabe der Papsturkunden .	2400 „
Herrn G. Roethe zur Fortsetzung der Untersuchung mittelniederdeutscher Handschriften	1000 „
Herrn E. Wiechert für Messungen der Parallaxe des Nordlichts	750 „
Herrn H. Graeven für Publication byzantinischer Elfenbeinreliefs	700 „

Außerdem sind der Expedition für Messungen der Erdschwere in Ostafrika 500 Mk. für Ersatzbarometer vorläufig zur Verfügung gestellt worden.

Ueber den Fortgang der Arbeiten, durch welche die Herausgabe der Papsturkunden von der K. Gesellschaft vorbereitet wird, haben der Leiter des Unternehmens Herr Kehr und seine Mitarbeiter in den Nachrichten der phil.-hist. Klasse mehrfach ausführlich berichtet. Der Bericht der Commission folgt weiterhin.

Der von den Herren C. F. Lehmann und W. Belck über die bisherigen Ergebnisse der mit Unterstützung der K. Gesellschaft unternommenen Forschungsreise durch Armenien erstattete Bericht erscheint in dem unter der Presse befindlichen Hefte der Nachrichten der phil.-hist. Klasse.

Der Bericht des Herrn Lietzmann über seine von der K. Gesellschaft unterstützten Catenenforschungen wird unten mitgetheilt.

Die Vorarbeiten für die von der K. Gesellschaft unterstützte Ausgabe der schönwissenschaftlichen Werke Kästners sind durch Herrn Scherer so weit gefördert, daß der Druck voraussichtlich im Mai oder Juni d. J. beginnen kann.

Herr Borchling hat im Auftrage der K. Gesellschaft namentlich die skandinavischen Bibliotheken auf mittelniederdeutsche Handschriften hin durchforscht und wird über den reichen Ertrag seiner Reisen in einem eingehenden Berichte vorläufige Rechenschaft geben, in ähnlicher Weise wie er bereits im abgelaufenen Jahre über seine mittelniederdeutschen Funde in Provinz Hannover, Hamburg, den Niederlanden ausgiebige Mittheilungen in den Nachrichten (Gesch. Mitth. 1898 S. 79 ff.) niedergelegt hat.

Die von Herrn P. Hildebrandt mit Unterstützung der K. Gesellschaft vorbereitete Neubearbeitung der Bobioscholien zu Ciceros Reden ist soweit gefördert, daß der Druck in kurzem beginnen kann. Herr Hildebrandt hat soeben eine letzte Nachvergleichung des Palimpsests in Mailand und Rom vorgenommen.

Herr M. Wellmann hat, um für die Synonymenüberlieferung des alphabetisirten Dioskurides eine festere Grundlage zu schaffen, die Synonymenlisten des Ps. Apuleius nach den beiden Florentiner Handschriften verglichen. Der cod. Laur. 74, 23 ist für die beiden ersten Bücher des D. nachverglichen, die Uebersetzung und Zusammenstellung der Parallelüberlieferung für den größten Theil des Werkes vollendet worden.

Das Gaußarchiv ist auch in diesem Jahre durch werthvolle Geschenke bereichert worden, für welche wir auch an dieser Stelle den Dank abstatten; wir heben hervor die von der Königl. preußischen Landesaufnahme des Großen Generalstabes geschenkten Akten der Hannoverschen Landesvermessung nebst den zugehörigen Originalberichten von Gauß, ferner die von Herrn Prof. Heinrich Weber in Braunschweig geschenkten Briefe von Gauß an Weber und Humboldt. Im Uebrigen wird über die Bereicherungen des Nachlasses wie über den Fortgang der Herausgabe der Gaußschen Werke weiterhin ein besonderer Bericht erstattet; desgleichen über die im Verein mit den cartellirten Körperschaften und der Berliner Akademie geführten Unternehmungen des Thesaurus linguae latinae und des Aegyptischen Wörterbuches.

Bei der Mathematischen Encyklopädie sind die Vorarbeiten soweit vorgeschritten, daß der Druck von Band I und II begonnen werden konnte; die beiden ersten Hefte von Bd. I sind bereits erschienen. Betreffs der späteren Bände, die der angewandten Mathematik gewidmet sein sollen, schien eine persönliche

Bezugnahme mit Vertretern der in Betracht kommenden Disciplinen, namentlich im Auslande, wünschenswerth. Herr F. Klein hat es übernommen die entsprechenden Reisen auszuführen und hat zu diesem Zwecke bereits im vorigen Herbst Holland und Frankreich, sowie neuerdings Süddeutschland, die Schweiz, Italien und Oesterreich besucht.

Der École française in Athen sendete zu ihrer im April begangenen Jubiläumsfeier, sowie der Königl. Schwedischen Akademie und den mit ihr bei dieser Gelegenheit vereinigten gelehrten Körperschaften von Stockholm zu der im Oktober veranstalteten Berzeliusfeier die K. Gesellschaft ihre Glückwünsche; desgleichen ihrem auswärtigen Mitgliede Herrn F. Wüstenfeld zum 90., ihrem correspondirenden Mitgliede Herrn H. Kiepert zum 80. Geburtstage (s. Gesch. Mitth. 1898 S. 74. 75).

Der in Posen neubegründeten Kaiser-Wilhelms-Bibliothek ist ein Exemplar der in ganzen Jahrgängen verfügbaren Schriften der Gesellschaft sowie ein Exemplar der erschienenen Bände von Gauß' Werken zur Verfügung gestellt worden.

Die Gesellschaft verlor durch den Tod

von auswärtigen Mitgliedern
in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Carl Claus in Wien am 18. Januar 1899, auswärtiges Mitglied seit 1873, zuvor Correspondent seit 1871.

Herrn Sophus Lie in Christiania am 18. Februar 1899, ausw. Mitglied seit 1892, zuvor Correspondent seit 1872.

Herrn Gustav Wiedemann in Leipzig im März 1899, ausw. Mitglied seit 1888.

in der philologisch-historischen Klasse:

Herrn Ferdinand Wüstenfeld am 8. Februar 1899, ausw. Mitglied seit 1887, zuvor ordentliches Mitglied seit 1856, Assessor seit 1841.

von correspondirenden Mitgliedern
in der mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Wilhelm Hankel in Leipzig am 17. Februar 1899, corr. Mitglied seit 1864.

in der philologisch-historischen Klasse:

Herrn Johannes Bühler in Wien am 8. April 1898, corr. Mitglied seit 1883.

Herrn Otto Ribbeck in Leipzig am 18. Juli 1898, corr. Mitglied seit 1888.

Die Gesellschaft wählte am 15. Mai 1898 zum ordentlichen Mitgliede ihrer mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Walther Nernst, allerhöchst bestätigt am 9. Juni 1898;

zu auswärtigen Mitgliedern ihrer mathematisch-physikalischen Klasse:

Herrn Alexander Agassiz in Cambridge U. St. A., allerhöchst bestätigt am 8. August 1898.

Herrn Robert Helmert in Potsdam, allerhöchst bestätigt am 9. Juni 1898.

Verzeichniss der im Jahre 1898/99 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Oeffentliche Sitzung vom 30. April 1898.

Der abtretende Sekretär erstattet den Bericht über das abgelaufene Geschäftsjahr. Es erstatten Sonderberichte über die Herausgabe der Gauß'schen Werke Herr F. Klein, über das Aegyptische Wörterbuch Herr Pietschmann, über die Bearbeitung der Papsturkunden Herr Kehr. Gedächtnißreden werden gehalten auf V. Meyer von Herrn Wallach, auf Steenstrup und Leuckart von Herrn Ehlers, auf Wattenbach (eingesandt) von Herrn Kehr.

Sitzung vom 14. Mai 1898.

W. Meyer, Der Ursprung des Motetts. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 113).

E. Riecke, Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme. II. Mittheilung. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 137).

W. Voigt, Thermodynamisches zu den Wechselbeziehungen zwischen Galvanismus und Wärme. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 113).

Derselbe: Beobachtungen über Festigkeit bei homogener Deformation, angestellt von L. Januszkiewicz, besprochen von W. Voigt. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 107).

F. Klein legt vor: P. Stäckel, Ueber Transformationen von Bewegungen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 157).

E. Riecke legt vor: G. Kümmell, Die klimatologischen Elemente Göttingens in den Jahren 1887—96. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 223).

Derselbe: E. Marx, Zur Kenntniß der Dispersion im elektrischen Spectrum des Wassers. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 154).

W. Voigt, Bemerkung über die Größe der Spannungen und Deformationen, bei denen Gleitschichten im Kalkspath entstehen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 146).

W. Schur, Ableitung relativer Oerter des Mondes gegen die Sonne. (Abhandl. math.-phys. Kl. N. F. I, 3).

N. Bonwetsch legt vor: C. Schmidt, Der Osterfestbrief des Athanasius vom J. 367. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 167)

Sitzung vom 11. Juni 1898.

P. Kehr, Papsturkunden in Apulien. Bericht über die Reise des Herrn L. Schiaparelli. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 237).

W. Voigt, Läßt sich die Pyroelectricität der Krystalle vollständig auf piezoelectrische Wirkungen zurückführen? (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 166).

Sitzung vom 25. Juni 1898.

E. Riecke, Ueber den Reactionsdruck der Kathodenstrahlen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898. S. 195).

J. Orth, Arbeiten aus dem pathologischen Institut in Göttingen. V. Bericht. (Nachr. math.-phys. K. 1898. S. 204).

Sitzung vom 9. Juli 1898.

W. Schulze, Ablautstudien I. (Erscheint in den Nachr. phil.-hist. Kl. 1899).

W. Meyer, Die Anklagepunkte des h. Bernhard gegen Abaelard. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 397).

F. Leo legt den Bericht der Delegirten-Commission für den Thesaurus linguae latinae über die Berliner Pfingstconferenz vor.

F. Klein legt vor: A. Hurwitz, Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variabeln. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 309).

D. Hilbert legt vor: E. Timerding, Die Reyesche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projectiver Grundgebilde. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 317).

W. Voigt, Ueber das bei der sogenannten totalen Reflexion in das Medium eindringende Licht. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 294).

Sitzung vom 23. Juli 1898.

G. Roethe, Die Reimvorreden des Sachsenspiegels. (Abhandl. phil.-hist. Kl. N. F. II. 8).

Derselbe kündigt an: C. Borchling, Die auf einer Reise in

Norddeutschland und Holland verzeichneten mittelniederdeutschen Handschriften. (Nachr., Gesch. Mitth. 1898 S. 79).

Sitzung vom 29. October 1898.

W. Voigt, Ueber den Zusammenhang zwischen dem Zeemannschen und dem Faradayschen Phänomen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 329).

F. Leo legt vor: M. Rieger, Ueber eine mißverstandene Stelle in Dantes Commedia. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 479).

F. Kielhorn legt vor: E. Leumann, Zwei orientalistische Entzifferungsprobleme. (Wird nicht erscheinen).

Eingegangen am 11. August:

F. Leo, Das Schlußgedicht des ersten Buches des Properz. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 469).

Oeffentliche Sitzung vom 12. November 1898.

Vortrag von J. Wellhausen über die Bedeutung des Wortes „Menschensohn" in den Evangelien.

Sitzung vom 26. November 1898.

P. Kehr, Papsturkunden in Siena.

Derselbe, Diplomatische Miszellen. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1898 S. 496).

W. Voigt, Zur Theorie der von den Herren Macaluso und Corbino entdeckten Erscheinungen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 349).

Derselbe: Doppelbrechung von im Magnetfelde befindlichem Natriumdampf in der Richtung normal zu den Kraftlinien. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 355).

F. Klein legt das 1. Heft der Mathematischen Encyklopädie vor.

W. Schur legt vor: H. Ludendorff, Ueber eine bemerkenswerthe Eigenschaft gewisser Gleichungen in der Theorie der charakteristischen Planeten. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 345).

Sitzung vom 10. Dezember 1898.

E. Ehlers, Ueber Palolo (Eunice viridis Gr.). (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 400).

D. Hilbert, Ueber die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 370).

Derselbe legt vor: A. Sommerfeld, Ueber die numerische Auflösung transcendenter Gleichungen durch successive Approximationen. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 360).

Sitzung vom 14. Januar 1899.

D. Hilbert legt vor: H. Liebmann, Eine neue Eigenschaft der Kugel. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

W. Nernst legt die 2. Auflage seiner „Theoretischen Chemie" vor

Th. Liebisch legt vor: O. Mügge, Ueber neue Structurflächen an den Krystallen der gediegenen Metalle. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

W. Voigt, Zur Theorie der Beugung ebener inhomogener Wellen in einem geradlinig begrenzten unendlichen Schirm. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

E. Riecke, Ueber die Arbeit, welche in größeren Funkenstrecken einer Töplerschen Influenzmaschine verbraucht wird. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

F. Merkel legt vor: J. Voigt, Zur Entwickelung der Darmschleimhaut. (Nachr. math.-phys. Kl. 1898 S. 416).

Sitzung vom 28. Januar 1899.

R. Pietschmann, Apophthegmata patrum boheirisch. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1899 S. 36).

Sitzung vom 11. Februar 1899.

G. Roethe legt vor: E. Schröder, Die Berner Handschrift des Matthias von Neuenburg. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1899 S. 49).

D. Hilbert legt vor: H. Minkowski, Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

Sitzung vom 25. Februar 1899.

F. Klein legt das 2. Heft der Mathematischen Encyklopädie vor.

D. Hilbert legt vor: C. Runge, Ueber ganzzahlige Gleichungen ohne Affect. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

W. Nernst legt vor: R. Zeynek, Ueber die Erregbarkeit sensibler Nervenendigungen. (Ersch. in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

Derselbe, Zur Theorie der elektrischen Reizung. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

W. Voigt legt vor: F. Nachtikal, Ueber die Proportionalität zwischen den piezoelektrischen Momenten und den ausgeübten Drucken. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

G. Kaibel legt vor: E. Ziebarth, Neue attische Fluchtafeln. (Erscheint in den Nachr. hist.-phil. Kl. 1899).

R. Pietschmann legt vor: A. Rahlfs, Alter und Heimath der Vatikanischen Bibelhandschrift. (Erscheint in den Nachr. hist.-phil. Kl. 1899).

F. Leo legt den Bericht der Herren C. F. Lehmann und W. Belck über die bisherigen Ergebnisse ihrer Reise durch Armenien vor. (Nachr. hist.-phil. Kl. 1899 S. 81).

Sitzung vom 11. März 1899.

R. Pietschmann, Theodorus Tabennesiota und die sahidische Uebersetzung des Osterfestbriefs des Athanasius. (Nachr. hist.-phil. Kl. 1899 S. 87).

N. Bonwetsch legt vor: H. Lietzmann, Bericht über Catenenforschungen. (Erscheint in den Nachr., Gesch. Mitth. 1899 Heft 1).

G. Kaibel legt vor: B. Keil, Zwei eleische Inschriften. (Erscheint in den Nachr. hist.-phil. Kl. 1899).

E. Riecke berichtet über seine Versuche über freie Electricität auf Crookesschen Röhren.

W. Voigt legt vor: E. Wiechert, Ueber die veränderten Apparate und Methoden im erdmagnetischen Observatorium. (Erscheint in den Nachr. math.-phys. Kl. 1899).

Ueber die Wedekindsche Preisstiftung für deutsche Geschichte ist Nichts zu berichten.

Die Thätigkeit der de Lagardeschen Stiftung ruht.

Für die Stiftung der Freunde Paul de Lagardes sind auch im abgelaufenen Jahre namhafte Schenkungen eingelaufen; insbesondere von Frau Geheimrath A. de Lagarde in Göttingen, Herrn Professor Dr. Hofmann in Kiel und Herrn Gerichtsassessor Römer in Aachen.

Bericht über die mit Unterstützung der K. G. d. W. vorgenommene Catalogisierung der Catenenhandschriften.

Von

H. Lietzmann.

Im Winter 1897 und im Verlaufe des Jahres 1898 sind die Catenenhandschriften der folgenden Bibliotheken untersucht worden: Florenz, Laurentiana*; Oxford Bodleiana*; London Brit. Mus.*, Bible society*; Rom Vaticana, Angelicana durch Herrn Dr. G. Karo. — München Hof- und Staatsbibl.*, Universitätsbibl.*; Basel Universitätsbibliothek*; Zürich Stadtbibliothek*; Wien, Hofbibliothek*; Venedig Marciana*; Mailand Ambrosiana*, Brera*; Verona bibl. Capit.* durch mich. Die mit einem Stern bezeichneten Bibliotheken dürfen als im wesentlichen erledigt gelten.

Untersucht sind im Ganzen 205 Handschriften, und zwar folgende:

München Hof- u. Staatsbibl. cod. graec. nr. 9. 12. 13. 14. 32. 33. 36. 38. 66. 82. 83. 99. 110. 131. 148. 208. 252. 292. 296. 359. 375. 412. 473. 478. 491. 561 (37. 437 waren z. Zt. verliehen). Univ. bibl. gr. 30.

Basel Univ. bibl. gr. 1. 15. 16. 19.

Zürich Stadtbibl. C 11.

Wien Hofbibl. cod. theol. (nr. nach Nessel) 7. 8. 11. 17. 24. 28. 36. 57. 59. 71. 73. 100. 115. 117. 135. 147. 152. 153. 154. 159. 166. 169. 229. 258. 277. 294. 297. 298. 299. 301. 302. 311. 314. 324. 329.

Oxford Bodleiana, Bar. 76. 154. 156. 176. 178. 195. 201. 211. 223. 225. 232. 235. Canon. 62. Laud. 20. 30. 33. 42. Misc. 1. 2. 5. 19. 30. 36. 44. 45. 46. 47. 48. 169. 179. 182. 200. Roe 4. 16.

London Brit. Mus. Burn. 34. Harl. 5677. 5791. Add. 7142. 10068. 19392*. 22734. 35123. Bible soc. Cod. Zacynthius.

Florenz Laurent. Med. IV 1. 29. V 6. 9. 14. 27. 30. VI 3. 5. 18. 33. 34. VIII 12. 14. 19. 27. X 4. 6. 7. 8. 19. 29. XI 4. 22. acquis. 44. conv. suppr. 171. 176. S. Marco 696.

Mailand Ambrosiana A 148 inf. 178 sup. B 106 sup. 117 sup. C 98 sup. 264 inf. 267 inf. 295 inf. D 73 sup. 161 inf. 473 inf. 541 inf. E 2 inf. F 12 sup. 126 sup. G 79 sup. J 125 sup. M 47 sup. 65 sup. 93 sup. S 12 sup. Brera AF XIV 13. 15.

Rom Vatic. gr. 338. 1520. 1648. 1657. Ottob. 9. 24. 117. Palat. 230. Reg. 7. 44. PiiII 1. 49. Angel. 113. 114. 117.

Venedig Marcian. gr. 15. 16. 17. 19. 21. 22. 23. 25. 27. 28. 33. 34. 87. 494. 495. 534. 536. 537. 538. 544. 545. 546. Append. cl. I. cod. 13. 30. 41. 43. 44. 61. Dazu ein seltener Druck der Jobcatene.

Verona bibl. Capit. 118.

Von diesen Hss. kommt eine Anzahl für die Catenenfrage nicht weiter in Betracht, weil sie entweder einen zusammenhängenden Commentar enthalten oder sämtliche Verfassernamen unterdrücken. Betreffs der übrigen lässt sich in Kürze Folgendes sagen.

Oktateuch: Die Mehrzahl der Hss. bietet die Catena Lipsiensis; an Alter ragen hervor Ven. 534 s. XI Laur. acqu. 44 s. X. Besonderheiten bieten Ven. 15 s. X Mon. 9 s. XI 82 s. XVI. Abweichende Typen sind, wie bereits H. Achelis erkannt hat, Basil. 1 s. X und Vat. Reg. 7 s. XV.

Psalter: Rec. I ist vertreten durch Ven. 17 s. X (a. 1000) und dessen Copie Mon. 12. 13 s. XVI, ferner durch Ambr. C 264 inf. s. XVI (nur tom. I). Selbständig, aber mit I verwandt sind Vind. 8 s. X/XI Ambr. F 126 sup. s. XIII. Mit II berührt sich stellenweise Vind. 297 s. XI Ambr. B 106 sup. s. X Ven. 536 s. XIV Laur. VI 3 s. XI; einen mit III verwandten Auszug aus II hat Ambr. C 98 sup. s. XIII. Rec. III bieten Mon. 252 s. XI Vind. 299 s. XIV Ven. app. 13 s. XII 30 s. X/XI 41 s. XVI Veron. bibl. cap. 118 s. XII Bodl. Laud. 42 s. XII Misc. 2 s. X/XI; an VI erinnert Ambr. M 47 sup. s. IX/X, VIII findet sich in Vind. 59 s. XII: mit den Pariser Klassen noch nicht zu identificieren sind Mon. 359 s. XI = Bodl. Bar. 235 s. XI, Ambr. F 12 sup. s. X Laur. V 14 s. XI/XII Bodl. Bar. 223 s. XV Can. 62 s. XII Misc. 5 s. IX Roe 4 s. XIII Brit. Mus. Harl. 5677 s. XV Add. 10068 s. XIII.

Salomonische Schriften sind meistens in der I. Recension vertreten, besonders wichtig erscheinen Ambr. A 148 inf.

Bericht über die mit Unterstützung der K. G. d. W. vorgenommene Catalogisierung der Catenenhandschriften.

Von

H. Lietzmann.

Im Winter 1897 und im Verlaufe des Jahres 1898 sind die Catenenhandschriften der folgenden Bibliotheken untersucht worden: Florenz, Laurentiana*; Oxford Bodleiana*; London Brit. Mus.*, Bible society*; Rom Vaticana, Angelicana durch Herrn Dr. G. Karo. — München Hof- und Staatsbibl.*, Universitätsbibl.*; Basel Universitätsbibliothek*; Zürich Stadtbibliothek*; Wien, Hofbibliothek*; Venedig Marciana*; Mailand Ambrosiana*, Brera*; Verona bibl. Capit.* durch mich. Die mit einem Stern bezeichneten Bibliotheken dürfen als im wesentlichen erledigt gelten.

Untersucht sind im Ganzen 205 Handschriften, und zwar folgende:

München Hof- u. Staatsbibl. cod. graec. nr. 9. 12. 13. 14. 32. 33. 36. 38. 66. 82. 83. 99. 110. 131. 148. 208. 252. 292. 296. 359. 375. 412. 473. 478. 491. 561 (37. 437 waren z. Zt. verliehen). Univ. bibl. gr. 30.

Basel Univ. bibl. gr. 1. 15. 16. 19.

Zürich Stadtbibl. C 11.

Wien Hofbibl. cod. theol. (nr. nach Nessel) 7. 8. 11. 17. 24. 28. 36. 57. 59. 71. 73. 100. 115. 117. 135. 147. 152. 153. 154. 159. 166. 169. 229. 258. 277. 294. 297. 298. 299. 301. 302. 311. 314. 324. 329.

Oxford Bodleiana, Bar. 76. 154. 156. 176. 178. 195. 201. 211. 223. 225. 232. 235. Canon. 62. Laud. 20. 30. 33. 42. Misc. 1. 2. 5. 19. 30. 36. 44. 45. 46. 47. 48. 169. 179. 182. 200. Roe 4. 16.

London Brit. Mus. Burn. 34. Harl. 5677. 5791. Add. 7142. 10068. 19392[a]. 22734. 35123. Bible soc. Cod. Zacynthius.

Florenz Laurent. Med. IV 1. 29. V 6. 9. 14. 27. 30. VI 3. 5. 18. 33. 34. VIII 12. 14. 19. 27. X 4. 6. 7. 8. 19. 29. XI 4. 22. acquis. 44. conv. suppr. 171. 176. S. Marco 696.

Mailand Ambrosiana A 148 inf. 178 sup. B 106 sup. 117 sup. C 98 sup. 264 inf. 267 inf. 295 inf. D 73 sup. 161 inf. 473 inf. 541 inf. E 2 inf. F 12 sup. 126 sup. G 79 sup. J 125 sup. M 47 sup. 65 sup. 93 sup. S 12 sup. Brera AF XIV 13. 15.

Rom Vatic. gr. 338. 1520. 1648. 1657. Ottob. 9. 24. 117. Palat. 230. Reg. 7. 44. PiiII 1. 49. Angel. 113. 114. 117.

Venedig Marcian. gr. 15. 16. 17. 19. 21. 22. 23. 25. 27. 28. 33. 34. 87. 494. 495. 534. 536. 537. 538. 544. 545. 546. Append. cl. I. cod. 13. 30. 41. 43. 44. 61. Dazu ein seltener Druck der Jobcatene.

Verona bibl. Capit. 118.

Von diesen Hss. kommt eine Anzahl für die Catenenfrage nicht weiter in Betracht, weil sie entweder einen zusammenhängenden Commentar enthalten oder sämtliche Verfassernamen unterdrücken. Betreffs der übrigen lässt sich in Kürze Folgendes sagen.

Oktateuch: Die Mehrzahl der Hss. bietet die Catena Lipsiensis; an Alter ragen hervor Ven. 534 s. XI Laur. acqu. 44 s. X. Besonderheiten bieten Ven. 15 s. X Mon. 9 s. XI 82 s. XVI. Abweichende Typen sind, wie bereits H. Achelis erkannt hat, Basil. 1 s. X und Vat. Reg. 7 s. XV.

Psalter: Rec. I ist vertreten durch Ven. 17 s. X (a. 1000) und dessen Copie Mon. 12. 13 s. XVI, ferner durch Ambr. C 264 inf. s. XVI (nur tom. I). Selbständig, aber mit I verwandt sind Vind. 8 s. X/XI Ambr. F 126 sup. s. XIII. Mit II berührt sich stellenweise Vind. 297 s. XI Ambr. B 106 sup. s. X Ven. 536 s. XIV Laur. VI 3 s. XI; einen mit III verwandten Auszug aus II hat Ambr. C 98 sup. s. XIII. Rec. III bieten Mon. 252 s. XI Vind. 299 s. XIV Ven. app. 13 s. XII 30 s. X/XI 41 s. XVI Veron. bibl. cap. 118 s. XII Bodl. Laud. 42 s. XII Misc. 2 s. X/XI; an VI erinnert Ambr. M 47 sup. s. IX/X, VIII findet sich in Vind. 59 s. XII: mit den Pariser Klassen noch nicht zu identificieren sind Mon. 359 s. XI = Bodl. Bar. 235 s. XI, Ambr. F 12 sup. s. X Laur. V 14 s. XI/XII Bodl. Bar. 223 s. XV Can. 62 s. XII Misc. 5 s. IX Roe 4 s. XIII Brit. Mus. Harl. 5677 s. XV Add. 10068 s. XIII.

Salomonische Schriften sind meistens in der I. Recension vertreten, besonders wichtig erscheinen Ambr. A 148 inf.

s. X Ven. 21 s. X/XI (der freilich im Namensetzen nachlässig ist) Rec. II findet sich Mon. 131 s. XVI (PEC) Ambr. C 267 inf. s. XVI (PiCii) Ven. 22 s. XII (PiEii) 23 s. IX (EiiCii), mit I und II verwandt, aber selbständig scheint Bodl. Bar. 195 s. XV (Pr.) zu sein, stärkere Abweichungen von I bieten Mon. 292 s. XVI (E) Vind. 258 s. XV/XVI (C), im Cant. weichen von III gleichmäßig ab Vat. Reg. 7 s. XV = Bodl. Misc. 200 s. XVI.

Job rec. I haben Laud. 30 s. XII Misc. 44 s. XII/XIII 47 s. XIV Angel. 113 s. XVI Vatic. 338 s. XI Mon. 148 s. XIII 491 s. XVI Vind. 11 s. XI Ambr. D 73 sup. s. IX/X M 65 sup. s. XI Ven. 21 s. X/XI 538 s. X (a. 905). Von I weichen eigenartig ab Laur. V 27 s. XIV Laud. 20 s. XIII Vat. PiiII 1 s. XII. Rec. II haben Bodl. Bar. 176. 178 s. XVI 195 s. XV 201 s. XII Vat. Ottob. 9. 24 s. XVI Palat. 230 s. X/XI Mon. 32 s. XVI Vind. 73 s. XV/XVI Ambr. B 117 sup. s. XIII Brera AF XIV 13 s. XVI Ven. app. 43 s. XVII und der Venediger Druck. Bilderhss. sind Palat. 230 und Ven. 538.

Prophetencatenen: Mit den Pariser Hss. stimmen Ang. 117 s. XVI (Is.) Basil. 16 s. XIII (Dan. Ez.) Vind. 24 s. XIII (Is.). Selbständig erscheinen Laur. V 9 s. XI (Pr. maj.) XI 4 s. XI (Pr. maj.) X 8 s. XI (Is.). Dazu kommen Laur. XI 22 s. XIII (Pr. min.) = Bas. 16 s. XIII und Ven. 25 s. XII/XIII (Is.). Die Catene des 'Nikolaos Muzanos' zu Is. 1—16 steht in Laur. V 9 s. XII Mon. 14 s. XVI Ambr. G 79 sup. s. XIII. Die Catene zu Is. 8_5—19 in Mon. 38 s. XVI ist aus Ven. 87 s. XII/XIII abgeschrieben: vielleicht ist Cat. zu Is. 17—66 in Ambr. S 12 sup. s. XIV/XV als zweiter Band der Muzanoscatene gedacht: die Catene ist gleich Paris. B.

Die Evangeliencatenen zeigen die weitaus verwickeltsten Verhältnisse, deshalb können hier zunächst nur wenige Angaben gemacht werden. I für alle 4 Evgl. hat Laur. VI 33 s. XI, für Luc. Ven. 545 s. XVI, mit I verwandt ist Bodl. Bar. 225 s. XII (Joh.) Ven. 27 s. X/XI (Joh.) 28 s. XII (Joh.), mit II berührt sich Laur. VI 34 s. XI conv. suppr. 171 s. X/XI Ven. 27 s. X/XI für Matth. Die Niketascatene zu Lucas haben Mon. 33 s. XVI 473 s. XIV Vind. 71 s. XIII Ven. 494 s. XIII: rec. VI hat Laur. conv. soppr. 176 s. X: also ist diese Recension kein Auszug aus Niketas' Catene wie Sickenberger (Röm. Quartalschr. 1898 p. 65 Lit. Rundsch. 1898 p. 134) meint, oder Niketas ist nicht der Verfasser, was z. B. für rec. II der Jobcatene sicher zutrifft. Niketas zu Mt. hat Mon. 36 s. XVI wonach Corderius' Druck. Die übrigen Hss. sind weniger wichtig und schwerer zu erkennen.

Catenenreste zu den Acta und den Catholischen Briefen finden sich Laur. IV 1. 29 s. X VIII 19 s. XII Brit. Mus. Add. 22734 s. XII. Die Paulinischen Briefe haben meist den sog. Oecumeniuscommentar, mit oder ohne Photius: zur letzteren (also älteren) Klasse gehören Vind. 166 s. XIV (Rom. mit eigenen Abweichungen) Ambr. C 295 inf. s. X Ven. 34 s. XI 546 s. X; Mon. 412 s. XIII, von dem 110 abgeschrieben ist, findet sich bei Cramer abgedruckt. Brit. Mus. Add. 7142 s. XI ist mit der älteren Oecumeniusrec. verwandt. Ambr. E 2 inf. s. XIII enthält eine wertvolle Catene zu Ebr. reichhaltiger als Cramer (Paris. 238). Eigentliche Catenen zur Apocalypse sind mir noch nicht begegnet.

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

Die Vorarbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden sind in dem verflossenen Geschäftsjahr erheblich gefördert worden.

Wir verdanken dies vorzüglich der Munificenz des Herrn Ministers, der auch für das vergangene Jahr unserm ständigen Mitarbeiter ein Stipendium gewährte, der Unterstützung die wir aller Orten fanden, und dem Eifer unserer Mitarbeiter.

Von diesen schied Herr Dr. Melle Klinkenborg am 1. Juli 1898 aus, um in den Königl. Preußischen Archivdienst überzutreten. Sein Nachfolger wurde Herr Dr. Wilhelm Wiederhold aus Clausthal. Neben ihnen hat Herr Dr. Luigi Schiaparelli wie in den früheren, so auch in dem letzten Jahr sich ganz unserm Unternehmen gewidmet und in unserm Auftrag die archivalischen Forschungen in Italien fortgesetzt. Seiner Hingabe und seinem Geschick schulden wir die wärmste Anerkennung.

Denn die Hauptlast der archivalischen Arbeiten lag auch in diesem Jahre auf seinen Schultern. Nach unserm vorjährigen Bericht befand er sich im Frühling vorigen Jahres in den Städten am Monte Gargano und der innern Abruzzen. Von hier aus besuchte er im Mai und Juni Perugia, Assisi, Todi, Cortona und Arezzo; über den Gewinn dieser Reise ist in unsern Nachrichten 1898 Heft 3 eingehend berichtet worden. Im Wintersemester, vom September bis Februar, bereiste Dr. Schiaparelli Venezien und Friaul und gewann auch hier reiche Ausbeute; selbst in Venedig, Padua und Mantua glückte ihm noch eine erfreuliche Nachlese, über die in nächster Zeit ausführlichere Mitteilungen erfolgen sollen. Zuletzt hat er in Piacenza gearbeitet, wo er unerwartet auf neues und wichtiges Material stieß, das noch weiterer Durchforschung bedarf.

Prof. Kehr hat, unterstützt von den Herren Dr. Wiederhold und Studiosus Voigt, im Herbst 1898 die bereits im Früh-

jahr begonnenen Forschungen in Toscana fortgesetzt. Vorzüglich wurden die Archive von Siena ausgebeutet, aber auch in Florenz, Grosseto und Massa neues Material gewonnen, das binnen Kurzem im Bulletino storico Senese vorgelegt werden wird. In diesem Frühjahr endlich hat Prof. Kehr zusammen mit Dr. Schiaparelli die Arbeiten im südlichen Italien zum Abschluß gebracht. Es wurden zunächst besucht die Archive Siziliens und, um nur die wichtigsten zu nennen, Palermo, Monreale, Mazzara, Cefalù, Patti, Girgenti, Siracusa, Catania und Messina erledigt. Ueberaus reich war auch die Ausbeute in La Valetta auf Malta. Hierüber wird in den Nachrichten von 1899 berichtet werden. Den Schluß der diesjährigen Arbeiten bildeten Forschungen in den Klöstern La Cava und Monte Cassino, wo zur Zeit Dr. Schiaparelli die von Prof. Kehr begonnenen Arbeiten fortsetzt. Ueber die Ergebnisse wird ein Bericht in den Miscellanea Cassinese erscheinen.

An diesen so günstigen Ergebnissen hat einen sehr wesentlichen Antheil die Unterstützung, die wir überall gefunden haben, und die Empfehlungen, durch die uns wohlwollende Gönner unsres Unternehmens die Wege geebnet haben. Ehrerbietigen Dank schulden wir vor allen Ihren Eminenzen, dem Cardinal Giuseppe Sarto Patriarchen von Venedig und dem Cardinal Michelangelo Celesia Erzbischof von Palermo. Der General der Dominicaner Abt Frühwirth, der päpstliche Archivar P. Heinrich Denifle, der Präfect der Vaticana P. Ehrle, der Scriptor der Vaticana Giovanni Mercati und der Prior von Monte Cassino D. Ambrogio M. Amelli haben sich unsrer mit Rath und That angenommen. Aber auch an Ort und Stelle selbst hat uns niemals die Hülfe der dazu Berufenen gefehlt. In Florenz haben sich die Herren Salvatore Minocchi, die Canoniker Mons. Ciaranfi und Gonfalonieri vom Domkapitel, Mons. Romeo Romei von S. Lorenzo und Alceste Giorgetti vom Staatsarchiv große Verdienste um den Fortgang unsrer Arbeiten erworben. In Arezzo unterstützten uns die Herren Comm. G. F. Gamurrini, Cav. Ubaldo Pasqui und die Canoniker Luigi Lallini und Pietro Cardeti, in Assisi Prof. Leto Alessandri, in Todi der Sindaco Cav. Pietro Paparini und Herr Mariani, in Perugia Senator Faina, Don Guido Barbieri Abt zu S. Pietro, Mons. Marzio Romitelli und Conte Vincenzo Ansidei, in Siena Prof. Ludwig Zdekauer, Cav. Alessandro Lisini und Canonicus Vittore Lusini. Herr Dr. Schiaparelli fand im Venetianischen und in Friaul auf Grund einer von dem Patriarchen von Venedig gegebenen allgemeinen Empfehlung an die geistlichen Bibliotheken und Archive der Pro-

vinz aller Orten die freundlichste Aufnahme. Auf unsern Dank haben vorzüglich Anspruch die Herren Mons. G. Bortolini von S. Marco in Venedig, Mons. Paolo Carlo Origo Bischof von Mantua, Mons. Carlo Sbudil-Bonatti ebenda und Don Gaetano Scardovelli Pfarrer zu S. Antonio di Porto. Auch die Herren Petelli und Mangilli von der Communalbibliothek und Cav. Davari vom Archivio Gonzaga in Mantua haben unsre Arbeiten thatkräftig unterstützt. In dem wichtigen Treviso förderten uns der Bischof Mons. Giuseppe Apollonio, Can. D. Emilio Bon, Mons. Angelo Marchesan und Prof. Bailo, in Vicenza Mons. Bortolan, in Belluno der Bischof Mons. Salvatore Bolognesi und Prof. Francesco Pellegrini, in S. Daniele Conte Daniele Concina und Abate Luigi Narducci, in Cividale Conte Alvise Zorzi, in Villanova Conte Luigi Puppi, in Porpetto Conte Luigi Frangipane, in Udine Cav. Vincenzo Joppi, Mons. Tito Missettini und Don Nicolo Poiani, in Conegliano Don Vincenzo Botteon und Herr Pietro Miotti, in Portogruaro Mons. Ernesto Degani, in Adria Herr Benvenuto Bocchi, in Chioggia Cav. Vincenzo Bellemo.

Auch in Sizilien haben wir nicht nur das freundlichste Entgegenkommen, sondern auch thätig fördernde Unterstützung gefunden. So in Palermo beim Principe Fitalia, bei den Herren des Staatsarchivs Barone R. Starrabba, Giuseppe La Mantia und C. A. Garufi. Das Kapitel vertrat Mons. Boglino. Zu größtem Danke sind wir verpflichtet Mons. Vincenzo di Giovanni und Herrn Carlo Crispo Moncada für Empfehlungen an die Bischöfe der Insel, von denen vornemlich Mons. Legumina Bischof von Girgenti und Mons. Giovanni Prevetera Bischof von Patti uns alle Erleichterungen und Hülfen gewährten. Wir schulden ferner Dank Mons. Pietro Natoli Canonico Priore zu Patti, Can. Vincenzo Serio zu Cefalù, Prof. Carlo Contessa zu Trapani, Mons. Dom Luigi della Marra in Catania und dem gelehrten Abt von La Cava Dom Benedetto Bonazzi.

So dürfen wir, auch der ferneren Unterstützung der Gelehrten der uns befreundeten Nation gewiß und in der Voraussetzung, daß es uns auch in Zukunft nicht an den nötigen Mitteln fehlen werde, hoffen, in nicht zu ferner Zeit die Forschungen in Italien zu allseitigem Abschluß zu bringen.

Die Kommission für Herausgabe der älteren Papsturkunden.

Ueber den Stand der Herausgabe von Gauß' Werken.

Zweiter Bericht*).

Von

F. Klein.

Im verflossenen Jahre ist die Herbeischaffung neuen Materials und die genaue Durchsicht des Nachlasses, sowie der Gauß-Bibliothek, soweit gefördert worden, daß diese Puncte als erledigt betrachtet werden können, jedenfalls was die Drucklegung der Bände VII und VIII angeht.

Folgendes neue Material ist uns zugänglich geworden:

I. Durch Ankauf:

1) Ein Vorlesungsheft von Gauß über praktische Astronomie, von Frau Prof. Peters in Königsberg.
2) Zwei Originalbriefe von Gauß (an Sophie Germain und an Rudolf Wagner), aus der Versteigerung der Boncompagni'schen Autographensammlung in Rom.

II. Geschenke:

1) Acht Convolute Akten der Hannöver'schen Landesvermessung (Beobachtungen, Abrisse und Coordinaten) nebst den zugehörigen Originalberichten von Gauß an das Hannöversche Ministerium.
   Geschenk der Kgl. preußischen Landesaufnahme des großen Generalstabes.
2) 21 Briefe von Gauß an Weber, nebst einem Brief von Gauß an Humboldt (auf Weber und erdmagnetische Fragen bezüglich, 1838), sowie eine Reihe Zettel mit Notizen.
   Geschenk von Prof. Heinrich Weber in Braunschweig.

*) Vergl. Bericht I in den Geschäftlichen Mitteilungen vom Jahre 1898, Heft 1.

3) Ein Heft mit Ausarbeitungen von drei Gauß'schen Vorlesungen über die Theorie des Erdmagnetismus, Geodäsie, Methode der kleinsten Quadrate; ferner ein Heft, enthaltend eine Ausarbeitung einer Gauß'schen Vorlesung „Theorie der imaginären Größen" nebst einer Vorlesung von Stern über bestimmte Integrale.

Beides Geschenke der Directoren des mathematischen Seminars der Universität Halle.

Die Hefte stammen aus dem Nachlasse von E. Heine.

4) Copieen der noch vorhandenen Briefe von Gauß an Sophie Germain und einiger anderer Briefe. — Einige Vorarbeiten von Schering für die Drucklegung der weiteren Bände, namentlich zur Theoria motus.

Geschenk von Frau Geheimrath Schering dahier.

5) 242 Briefe Gerling's an Gauß und einige Briefe von Gauß' Kindern an Gerling.

Geschenk der Frau Hofphotograph Rothe in Kassel.

6) Copie eines Briefes von Gauß an Graßmann.

Geschenk von Prof. Engel in Leipzig.

7) Copie zweier Briefe von Gauß an Schumacher und an einen Unbekannten.

Geschenk von Prof. Stäckel in Kiel.

8) Copie eines Briefes von Gauß an Pater Koller.

Geschenk von Prof. Schwab in Kremsmünster.

9) Ein Autograph von Gauß (über Schachspiel).

Geschenk von Frau Prof. Listing in Hannover.

III. Zeitweise überlassen:

1) Tagebuch von Gauß über seine wissenschaftlichen Entdeckungen.

(Von 1796 bis 1800, bez. mit großen Unterbrechungen bis 1814).

Ferner ein Notizbuch von Gauß und eine Reihe Zettel.

Von Herrn Gauß in Hameln (Enkel von Gauß).

2) Originalmanuscripte zu den Gauß'schen Abhandlungen: „Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae" (1817) und „Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam . . . esset dispertita" (1818).

Ferner eine Reihe (nicht von Gauß selbst herrührender) Ausarbeitungen und Rechnungsbeispiele zur Theoria motus.
Von der New-York Public Library.

3) Brief von Gauß an Bohnenberger. Durch Prof. Hammer in Stuttgart.

4) Brief von Gauß an Fechner. Durch die K. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.

5) Brief von Gauß an Herger. Durch Prof. Hüfner in Tübingen.

6) Briefe von Gauß an Kestner. Durch Prof. Engel in Leipzig, aus der Universitätsbibliothek daselbst.

7) Brief von Gauß an Scherk. Durch Prof. Study in Greifswald.

8) Copieen zweier Briefe von Gauß an Olbers (Originale in Pulkowa). Durch Dir. Dr. Schilling in Bremen.

9) Ausarbeitung einer Gauß'schen Vorlesung „Geodätischer Calcul" nebst einer Reihe weiterer Notizen. Durch Frau Prof. Listing in Hannover.

10) Copieen von Briefen von Encke an Olbers, Bessel an Repsold und andere. Drei Briefe von Olbers an Argelander. Ausarbeitung einer Gauß'schen Vorlesung über „Theoretische Astronomie".
Aus dem Nachlaß von Winneke, durch Prof. Wislicenus (bez. Frau Winneke) in Straßburg.

11) Ein Heft „Abhandlungen von C. F. Gauß" (aus dem Nachlaß von Wilhelm Weber), im wesentlichen nur bereits Gedrucktes enthaltend. Durch Prof. Jacobj in Göttingen.

Außerdem haben wir folgende Gaussiana als Geschenk erhalten:

1) Auf Veranlassung der Calvör'schen Buchhandlung in Göttingen, von der technischen Hochschule in Braunschweig, durch Prof. Fricke daselbst:
Eine Reihe von Berichten und Zeitungsnotizen über das Gauß-Denkmal in Braunschweig und das Braunschweig'sche Gauß-Stipendium. (Aus den Jahren 1877 und 1878).

2) Von Prof. Engel in Leipzig:
Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers. Von Friedrich Engel. Leipzig 1898. (Vgl. Nachwort, S. 475—476).

3) Von Prof. Lindemann in München:
Gedächtnißrede auf Seidel. Aus den Abhandlungen der Münchener Akademie.

4) Von Frau Geh. Rath Schering:
Schering's Exemplar von Boncompagni, intorno ad una lettera di Gauß (ad Olbers).

5) Von der Springer'schen Verlagsbuchhandlung in Berlin, bez. dem Herausgeber, Herrn Director Schilling in Bremen:
Die Aushängebogen des in Druck befindlichen Briefwechsels zwischen Gauß und Olbers. Es sind bis jetzt 18 Bogen sowie 9 Bogen des Ergänzungsbandes, welcher die von Prof. Schur bearbeiteten Beobachtungen von Olbers enthält, gedruckt.

Von allem diesem Material ist wissenschaftlich unvergleichlich das interessanteste das oben unter III, 1 angeführte, durch die Vermittelung von Prof. Stäckel uns zugekommene Tagebuch von Gauß. Dasselbe beginnt 1796 mit dem Satze:

„Principia quibus innititur sectio circuli ac divisibilitas ejusdem geometrica in septemdecim partes etc.
Mart. 30. Brunsv."

und gibt nun in chronologischer Reihenfolge bis zum Jahre 1800 eine lange Reihe der merkwürdigsten Notizen, durch welche die einzelnen mathematischen Entdeckungen von Gauß, die in jene Jahre fallen, in genauer Weise datiert werden. Wir nennen hier von 1800:

„Theoriam quantitatum transcendentium

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$$

ad summam universalitatem perduximus.
Brunsv. Mai 6."

„Incrementum ingens hujus theoriae invenire contigit, per quod simul omnia praecedentia nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur. Brunsv. Mai 22."

„Nov. 30. Felix fuit dies quo multitudinem classium formarum binariarum per triplicem methodum assignare largitum

est nobis, puta 1) per producta infinita, 2) per aggregatum infinitum, 3) per aggregatum finitum cotangentium seu logarithmorum sinuum. Brunsv."

In den folgenden Jahren wird diese Liste leider nur mit Unterbrechungen weitergeführt, bis sie in den Jahren 1813 und 1814 mit zwei Notizen über biquadratische Reste abbricht, die wir auch noch hierher setzen:

„Fundamentum theoriae residuorum biquadraticorum *generalis*, per septem propemodum annos summa contentione sed semper frustra quaesitum tandem feliciter deteximus eodem die quo filius nobis natus est. 1813 Oct. 23. Gott."

„Subtilissimum hoc est omnium eorum quae unquam perfecimus. Vix itaque operae pretium est, his intermiscere mentionem quarundam simplificationum ad calculum orbitarum parabolicarum pertinentium."

„Observatio per inductionem facta gravissima theoriam residuorum biquadraticorum cum functionibus lemniscaticis elegantissime nectens. Puta si $a+bi$ est numerus primus, $a-1+bi$ per $2+2i$ divisibilis, multitudo omnium solutionum congruentiae $1 = xx + yy + xxyy$ (mod. $a+bi$), inclusis $x=\infty$, $y=\pm i$, $x=\pm i$, $y=\infty$ fit $=(a-1)^2+bb$. 1814 Jul. 9."

Es erübrigt, daß ich über den Fortschritt der redactionellen Arbeiten Einiges hinzufüge. Für den ersten Teil von Bd. VIII liegen die Manuscripte für Arithmetik und Analysis (Fricke), Numerisches Rechnen und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Börsch und Krüger) fertig vor, während das Manuscript für Geometrie (Stäckel) fast vollendet ist. Für den zweiten Teil von Bd. VIII ist das Manuscript zur Geodäsie (Börsch und Krüger) zum großen Teil fertig. Für Band VII (Astronomie, Brendel) konnten bisher nur oberflächliche Vorarbeiten vorgenommen werden. Der Druck von Band VIII hat begonnen und soll jetzt regelmäßig weitergeführt werden.

Göttingen, den 29. April 1899.

Wörterbuch der ägyptischen Sprache.

Bericht über das Geschäftsjahr 1898.

Die Kommission verlor durch den Tod ihr Mitglied Georg Ebers. Obwohl vielfach durch Krankheit behindert, hat er dem Wörterbuch-Unternehmen vom Anbeginn in Rat und Tat seine Förderung zu Teil werden lassen. Ein neuer Vertreter ist für die Königlich bayerische Akademie der Wissenschaften noch nicht ernannt. Als Mitarbeiter gewonnen sind außer den Gelehrten, die im vorjährigen Berichte genannt wurden, die Herren G. Möller und J. Herbert Walker.

In dem Berichte des vorigen Jahres war bereits erwähnt, daß Herr Dr. Wilhelm Heintze, welcher dem Kaiserlichen General-Konsulate zu Kairo attachiert war, die Wiedereröffnung der fünf Pyramiden des Alten Reichs, welche auf den Wänden ihrer Innenräume mit Inschriften versehn sind, und die Herstellung von photographischen Aufnahmen und von Abklatschen dieser Inschriften in Angriff genommen hatte. Dies Unternehmen, dessen beträchtliche Kosten Herr Dr. Wilhelm Heintze getragen hat, ist glücklich zur Ausführung gebracht worden mit thatkräftiger und sachkundiger Unterstützung von seiten des Herrn Dr. Ludwig Borchardt, der die Leitung der Arbeiten und zum großen Teil auch die Anfertigung der Photographien übernahm. Die Pyramidentexte, welche die Grundlage für die Erschliessung der ältesten Phase der ägyptischen Sprache bilden, können dank dieser opferwilligen Zuwendung für das Wörterbuch in völlig gesicherter Gestalt verwertet werden.

Auch von anderer Seite wurden Beiträge zur Gewinnung eines kritisch gesichteten Materials für das Wörterbuch gespendet, so von Dr. O. Lange, der bei einem Aufenthalte in London die dort aufbewahrten medizinischen und magischen Papyrus teils abschrieb, teils verglich, und von Dr. K. Reinhardt, der aus Kairo

wiederholt Abklatsche von Inschriften einsandte, die dort im Antikenhandel ihm begegnet waren.

Die lexikalische Ausbeutung der Inschriften nach der Methode des Thesaurus linguae latinae nahm ihren Fortgang. Die Zahl der nach diesem Verfahren autographierten einzelnen Textabschnitte betrug bis zum 1. April d. J. 3608, die der alphabetisch fertigen Zettel 62000.

Für die Akademische Kommission zur Herausgabe eines ägyptischen Wörterbuchs.

Richard Pietschmann.

Bericht über den Thesaurus linguae latinae.

Von

Friedrich Leo.

Da in dem jetzt beginnenden Jahre der Thesaurus linguae latinae aus dem Stadium der Vorbereitung in das der Ausführung treten und damit zugleich seinen Göttinger Sitz verlassen wird, so erstatte ich der K. Gesellschaft, welche sich bisher mit den Conferenzberichten der Delegirten-Commission und meinen ergänzenden Mittheilungen begnügt hat, diesesmal einen allgemeinen Bericht über den Fortgang und Stand des Unternehmens; dieser Bericht wird sich auf die wichtigsten Ergebnisse der ganzen demnächst ablaufenden Periode und auf die für die Zukunft getroffenen Dispositionen miterstrecken.

In der Göttinger Conferenz zu Pfingsten 1894 sind die Normen festgelegt worden, nach denen das Material für die künftige Ausarbeitung des Thesaurus beschafft und zubereitet werden sollte. Mit dem Juli desselben Jahres begann die regelmäßige Thätigkeit an den beiden für die Arbeit bestimmten Centren, München und Göttingen. Die Vertheilung des gesammten Vorraths an Sprachdenkmälern geschah in der Weise, daß zunächst die Poesie nach Göttingen, die Prosa nach München, alsdann, um die Quantität auszugleichen, eine Reihe von Prosaautoren und die Inschriften nach Göttingen übernommen wurden. Als Zeitgrenze für die in Betracht kommende Litteratur wurde im allgemeinen das 7. Jahrhundert angesetzt. Wir berechneten damals die Periode der Materialsammlung auf ein Minimum von 5, ein Maximum von 7 Jahren; wir können nun sagen, daß das Minimum nur um ein Geringes überschritten werden wird.

Um den eigentlichen Grundstock des Materials zu bilden, sollte die gesammte lateinische Litteratur von den Anfängen bis gegen

die Mitte des 2. Jahrhunderts nach Chr. in Zettel aufgelöst und zu Speciallexica zusammengeordnet werden. Diese Arbeit ist in folgender Weise ausgeführt worden. Jeder einzelne Text wurde, und zwar fast durchweg von competentesten Kennern des Autors oder seines Sprachkreises, einer neuen Revision unterzogen. Ich darf bei dieser Gelegenheit hervorheben, daß das Unternehmen in der ganzen philologischen Welt bereit- und opferwillige Unterstützung gefunden hat. Die revidirten und mit den Angaben über die maßgebende Ueberlieferung wie mit Andeutungen für das sprachliche und sachliche Verständniß versehenen Texte wurden autographisch vervielfältigt und in Zettel zerlegt, deren jeder einen zusammenhängenden Abschnitt von 10—14 Versen oder Zeilen enthält; für jeden Abschnitt sind so viele das Stichwort auszeichnende Zettel vorhanden wie der Abschnitt Wörter enthält. Für jeden Autor wurden die Zettel alphabetisch geordnet und so für jeden ein Lexicon hergestellt, dessen Benutzer in den Stand gesetzt ist, unmittelbar aus den Zetteln heraus das Verhältniß des Wortes zum Satze und im Zusammenhang der Sätze sowie die kritische Sicherheit des Textes zu beurtheilen. Nur für wenige Texte (Ciceros Reden und philosophische Schriften, Caesar, Tacitus) wurden die vorhandenen Wörterbücher ausreichend befunden, aus ihnen die Zettelglossare auf halbmechanischem Wege zuzubereiten. Dieser Theil der Arbeit ist nahezu vollendet; in wenigen Monaten wird das lateinische Sprachmaterial von den punischen Kriegen bis zur Antoninenzeit in wissenschaftlich zuverlässigen Spezialglossaren zu sämmtlichen Autoren für die gelehrte Benutzung bereit liegen.

Von der späteren Litteratur ist ein Theil in derselben Weise verarbeitet worden, so der ganze Apuleius, die Vulgata, Commodian, ein Theil Tertullians; wenige andere, wie Ammianus Marcellinus, sind ihrem ganzen Wortbestande nach excerpirt worden. Für die große Masse aber der sich über vier bis fünf Jahrhunderte erstreckenden römischen Schriftstellerei nach Sueton und Fronto wird der Thesaurus auf die das Wichtige heraushebenden Excerpte angewiesen sein, die so weit möglich von speciellen Kennern der betreffenden Texte, durchaus aber von Philologen hergestellt wurden und werden, die zu dieser schwierigen Arbeit wissenschaftlich qualificirt sind. Solche Excerpte können bei der Fülle verschiedenartiger und stets von der Subjectivität der Bearbeiter abhängiger Gesichtspunkte in der Regel nur einen relativen Werth haben und ihren Zweck nur annähernd erfüllen. Wir mußten uns an das Erreichbare halten. Dem Ziele würde man näher kommen,

wenn man jeden Autor einem halben Dutzend Bearbeiter zuweisen könnte, um später die übereinstimmenden Excerpte auszumustern. Aber weder ein solches Verfahren noch die Auflösung der gesammten Litteratur in Zettelglossare noch auch die bloße Excerpirung der gesammten spätlateinischen Prosaschriften in ihrer kaum übersehbaren Ausdehnung gehört zum Erreichbaren. Auch in der Beschränkung wird das Excerptenmaterial neben dem Grundstock der Zettelglossare eine sehr werthvolle Grundlage für die Wortgeschichte des Spätlateins bilden, wie sie bisher auch nicht annähernd zur Verfügung stand. Von hervorragender Wichtigkeit sind hier die Inschriften. Diese wie die poetischen Texte werden vollständig, von der Prosa die überwiegende Fülle des Wichtigen zur Excerpirung herangezogen.

Neben dieses den Sprachvorrath darstellende Zettelmaterial treten die Auszüge aus der modernen wissenschaftlichen Litteratur, die gleichfalls bis zum Herbst zu Ende geführt sein werden.

Die Excerpirung der spätlateinischen Litteratur hat aus sachlichen und persönlichen Gründen größere Schwierigkeiten gemacht und einen langsameren Fortgang genommen als die Herstellung der Zettelglossare. Während für diese die Verwendung auswärtiger Mitarbeiter sich in hohem Maße bewährt hat, erschien es in den letzten Jahren, je näher der Termin für die Beendigung der Materialsammlung heranrückte, um so gerathener, die Excerpirung möglichst an den Arbeitscentren selbst durch ständige Mitarbeiter ausführen zu lassen. Gleichzeitig traten der Delegirten-Commission in ihren Erwägungen und Berathungen immer greifbarer die Schwierigkeiten entgegen, die das bis dahin geplante System der Ausführung des Thesaurus selbst durch eine über die Länder zerstreute Schaar von Mitarbeitern mit sich führen mußte. Dieses System hätte den großen Vortheil gebracht, daß alle durch ihre wissenschaftliche Production bekannten Specialisten hätten herangezogen werden können; aber außer anderen schwerwiegenden Bedenken entschied gegen das System schließlich die Gefahr, die für das Material des Thesaurus mit der Vertheilung an viele Orte verbunden sein würde, sowie die Unzweckmäßigkeit solcher Vertheilung an sich: denn die meisten Artikel werden nicht allein aus den zu dem Worte selbst gehörigen Zetteln, sondern unter Benutzung des übrigen Materials redigirt werden müssen. Es wurde also auf den schon früher erwogenen Gedanken zurückgegriffen, den Thesaurus so gut wie ganz (denn daß Ausnahmen stattfinden ist wünschenswerth) am Orte selbst von ständigen, in der Vorbereitungsperiode zumeist bereits eingearbeiteten, durch Tradition

und gegenseitige Anregung verbundenen Mitarbeitern ausführen zu lassen.

Nachdem wir diese Wahl getroffen hatten, sahen wir uns vor einer neuen Entscheidung. Sobald es erkannt war, daß die Arbeit überhaupt concentrirt werden mußte, war es auch einleuchtend, daß das dualistische System, auf Grund dessen wir die Materialsammlung organisirt und durchgeführt hatten, während der Ausführungsperiode nicht beibehalten werden konnte. Keine Zweitheilung oder Auftheilung des Materials ließ sich ersinnen, keine zweckmäßige Vertheilung der Arbeit, keine Einheitlichkeit der Ausführung. Der Entschluß war gegeben, das gesammte Material an einem Orte zu vereinigen und die Ausarbeitung unter eine einheitliche Leitung zu stellen. Hier ergab sich sogleich, daß von den drei Mitgliedern des Directoriums keiner diese Leitung übernehmen konnte. Denn wenn einer von uns geglaubt hätte, die noch in Aussicht stehenden 15 Jahre für das Unternehmen übrig zu haben, so konnten wir doch schon jetzt nicht mehr zweifeln, daß der Leiter dieser Arbeit eine andere Berufsarbeit, also auch eine umfassende und verantwortungsvolle Lehrthätigkeit, neben der Ausarbeitung des Thesaurus nicht wird ausüben können. Die einzige Möglichkeit das Werk zum Ende zu führen war, es einem jüngeren Gelehrten zu übergeben, der, durch wissenschaftliche Qualität dazu berufen und durch seine Lebensstellung noch nicht gehindert, gewillt wäre es zu seiner Lebensaufgabe zu machen. Diesen Mann haben wir in Dr. Friedrich Vollmer, bisher Director einer deutschen höheren Schule in Brüssel, gewonnen. Er wird als Generalredactor, selbstverständlich der Commission der Delegirten der fünf Akademien untergeordnet und unter Aufsicht des Directoriums, aber in einer wissenschaftlich vollkommen selbständigen Position die Ausarbeitung des Thesaurus leiten. Die finanzielle Ordnung der neuen Einrichtung hat innerhalb der vorhandenen Mittel durchgeführt werden können.

Als geeignete Orte für die Ausarbeitung hat die Commission Berlin, Leipzig und München bezeichnet. Sie hat sich vornehmlich in Anerkennung der großen Verdienste, die der Delegirte der K. bayrischen Akademie und diese selbst sich seit vielen Jahren um die Vorbereitung und Ausführung des Unternehmens erworben haben, für München entschieden, nachdem Regierung, Akademie und Universität in entgegenkommender Weise die von der Commission für nöthig gehaltenen Zusagen gemacht haben. Die Ueberführung des Göttinger Materials nach München ist für Anfang October in Aussicht genommen. Bis zu dieser Zeit soll die Materialsammlung an

beiden Orten zu Ende geführt und alsdann in München vor der definitiven Vereinigung der Bestand von der Commission geprüft und das Inventar aufgenommen werden.

Dagegen hat die Commission sich ausdrücklich vorbehalten, über den Ort, an dem das Material nach Vollendung des Thesaurus für alle Zeit verbleiben soll, erst zu geeigneter Zeit den zu dem Unternehmen vereinigten Akademien ihre Vorschläge zu machen. Dieses Material bildet bereits jetzt ein wissenschaftliches Archiv ersten Ranges. Es ist einer Entwicklung fähig, die die größten Ausblicke bietet. An die Stelle der Excerpte werden für einen Text nach dem andern, zuerst für die in kritischen Ausgaben vorliegenden, dann für jeden wie er in kritischer Bearbeitung erscheint, die Zettelglossare treten müssen. Während der Thesaurus selbst der Natur jeder menschlichen Arbeit nach nur den Stand des Wissens gewisser Jahrzehnte in einer durch Mittel und Zweck gebotenen Comprimirung darstellen kann, wird sein Material den Centralpunkt für die lateinischen Studien des nächsten Jahrhunderts bilden. Ein Material, das zu solcher Erweiterung und Benutzung bestimmt ist, bedarf einer ständigen wissenschaftlichen Verwaltung; die Vortheile des Besitzes werden mit Pflichten verbunden sein: es wird sich nach Vollendung des Werkes darum handeln, welcher der in Betracht kommenden Staaten die Pflichten zu übernehmen bereit sein wird.

Preisvertheilung.

Rechtzeitig und unter Beobachtung der vorgeschriebenen Bedingungen war zur Lösung der von der Gesellschaft für das Jahr 1899 gestellten Preisaufgabe: „Was an Schriften des Apollinaris von Laodicea erhalten ist, soll untersucht, kritisch bearbeitet und für die Darstellung seiner Theologie verwendet werden", eine Arbeit mit dem Motto: *καὶ τὰ δοκηθέντ' οὐκ ἐτελέσθη* eingegangen. — Das Urtheil über sie lautet:

Die zur Lösung der Preisaufgabe eingegangene Arbeit umfaßt 443 Seiten gr. 4° und wol c. 600, teilweise beschriebene, Seiten 8°. Entsprechend der Fassung der Preisaufgabe galt es zunächst den gesamten noch vorhandenen Bestand an literarischem Eigentum des Apollinaris zu sammeln, auf seine wirkliche Zugehörigkeit an denselben zu prüfen, ihn textkritisch zu bearbeiten und historisch — vor allem dogmenhistorisch — zu verwerten. War mit jener Fassung der Aufgabe das Ziel ausgesprochen, welches die Gesellschaft der Wissenschaften im Auge hatte, so blieb ihr natürlich nicht verborgen, daß sie kaum erwarten durfte, in der gegebenen Frist eine Arbeit zu erhalten, welche wirklich schon allen den gestellten Anforderungen entsprach. Aber sie mußte das zu erstrebende Ziel in jener Vollständigkeit ins Auge fassen, um an der Weise, wie die verschiedenen Seiten der zu lösenden Aufgabe in Angriff genommen wurden, erkennen zu können, ob der Verfasser der etwa einlaufenden Preisarbeit die Gewähr biete, die Aufgabe in ihrem ganzen Umfang erfolgreich durchzuführen.

Der Vf. der jetzt vorliegenden eingegangenen Arbeit bekennt von vornherein offen, daß er „nicht nur weit hinter den Anforderungen zurücksteht, die das Thema stellt, sondern nicht einmal das von ihm anfänglich für erreichbar Gehaltene erfüllt", aber er hofft, „die Gesellschaft werde in diesen Anfängen die Bürgschaft für spätere Erfüllung des von ihr Geforderten erblicken." Eben

diesen Gesichtspunkt halten die Referenten für den gewiesenen, und unter ihm glauben sie die Arbeit prüfen zu sollen.

Gemäß der gestellten Aufgabe hat der Vf. es sich zunächst angelegen sein lassen, mit möglichster Vollständigkeit das zu sammeln, was an und aus den Schriften des Apoll. noch erhalten ist. Die Energie, mit welcher er dies Ziel zu erreichen gestrebt hat, begründet ein Hauptverdienst seiner Arbeit. Der letzte deutsche Bearbeiter der Schriften des Apoll., Dräseke in den Texten und Untersuchungen von v. Gebhardt und Harnack VII, 1892, hatte, da die Schriften des Apoll. zum Teil orthodoxen Kirchenlehrern zugeschrieben worden sind, den Weg eingeschlagen, Werke zweifelhafter Authentie daraufhin zu prüfen, ob sie nicht etwa Apoll. zum Verfasser haben. Mit Recht hat sich der Autor der Preisarbeit gegen die Methode und die Ergebnisse Dräsekes ablehnend verhalten; er trifft in letzterer Hinsicht zusammen mit der ihm unbekannt gebliebenen russischen Arbeit Spasskij's, wo der eingehende Nachweis gegen Dräseke gegeben ist. Dagegen hat der Vf. sich mit großem Erfolg gemüht, das in den zahlreichen Catenen, d. h. Sammlungen von Schrifterklärungen der Väter, zerstreute, zumeist nur handschriftlich vorhandene exegetische Eigentum des Apollinaris zu sammeln, so daß dieses nunmehr in großem Umfange vorliegt. Auch wo es sich dabei um bereits Veröffentlichtes handelt, ist erst durch den Vf. eine gesichertere handschriftliche Grundlage beschafft worden und damit die nächste Voraussetzung für eine Untersuchung der Wirksamkeit des Apoll. als Exegeten, zum Teil auch für das dogmenhistorische Verständnis desselben gegeben. Bedauert der Vf., daß es ihm nicht möglich war, die Autorschaft des Apoll. in Bezug auf diese zahlreichen exegetischen Fragmente zu untersuchen — das Resultat wäre wol sicher ein zumeist günstiges gewesen —, und betont er, daß ihm eine vollständige kritische Durcharbeitung keiner Catene möglich gewesen, so liefert doch das von ihm bereits Gebotene den deutlichen Beweis seiner Befähigung zur erfolgreichen Durchführung des in Angriff Genommenen. Der Vf. ist offenbar philologisch auf das Beste geschult; die Recensio wird mit wenigen Worten auf Grund sicherer Indicien, wie es scheint, festgtstellt und darnach der Text consequent behandelt. Das Gleiche gilt in Bezug auf die in direkter oder indirekter Ueberlieferung vorhandenen dogmatischen Schriften des Apollinaris. Auch hier wird über den ganzen Bestand der Textüberlieferung orientirt; die Uebersetzungen wie die Citate bei anderen Kirchenvätern werden berücksichtigt und verwertet. Die

klare und knappe Fassung der adnotatio critica aber zeigt deutlich, wie vertraut dem Vf. eine solche Arbeit ist; und die Beurteilung der handschriftlichen Verhältnisse, wobei nur Entscheidendes hervorgehoben wird, beweist, daß sich nicht leicht ein anderer finden lassen wird, der mit den patristischen Kenntnissen soviel philologische Begabung und technische Sicherheit verbindet. Auf die beigegebene reiche Sammlung von Zeugnissen der Väter über Apollinaris sei nur kurz hingewiesen. Seine ungewöhnliche Befähigung, auch dogmengeschichtliche Fragen mit Erfolg zu behandeln, hat der Vf. durch seine zwar kurze, aber lichtvolle Darlegung der Theologie des Apoll. documentirt, namentlich durch seine scharfe Unterscheidung zweier Phasen in der Entwicklung des Apoll. — welche dann den beiden in seiner Schule vertretenen Richtungen entsprechen —, falls nämlich die vortrefflich bezeugte *Ἀπόδειξις περὶ τῆς θείας σαρκώσεως* wirklich ein Werk des Apoll. selbst ist.

Die Referenten können daher nur urteilen, daß in dem von dem Verf. der Preisarbeit Gebotenen die Bürgschaft für eine erfolgreiche Zuendeführung der von der Gesellschaft gestellten Aufgabe gegeben ist, und empfehlen das Werk als das einer offenbar in besonderem Maße zur Lösung jener Aufgabe befähigten Persönlichkeit angelegentlich zur Krönung mit dem Preise.

Danach hat die K. Gesellschaft d. W. beschlossen, dem Verfasser den vollen Preis zuzuerkennen.

Die Eröffnung des Couverts ergab als Verfasser:

Lic. Hans Lietzmann in Bonn.

Die Preisaufgabe für das Jahr 1901 lautet:

Es soll für einen beliebigen Zahlkörper das Reciprocitätsgesetz der l-ten Potenzreste entwickelt werden, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet.

Erläuterung. Es sei l eine ungerade Primzahl, ζ eine von 1 verschiedene l-te Einheitswurzel, und k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper, welcher die Zahl ζ enthält: bedeuten dann ν, μ irgend zwei ganze Zahlen des Körpers k und $\mathfrak{w}$ irgend ein Primideal in k, so läßt sich das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für l-te Potenzreste im Zahlkörper k durch die Gleichung

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left\{ \frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}} \right\} = 1$$

darstellen; hierin erstreckt sich das Product über sämmtliche

Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k und das Symbol $\left\{\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right\}$ bezeichnet eine in geeigneter Weise zu definirende und durch die Zahlen ν, μ sowie das Primideal $\mathfrak{w}$ eindeutig bestimmte l-te Einheitswurzel. Es soll dieses Reciprocitätsgesetz für l-te Potenzreste dem vollen Inhalte nach ausgeführt und, wenigstens in einigen ausgezeichneten Specialfällen oder unter geeigneten vereinfachenden Annahmen, bewiesen werden. Besonderer Werth wird auf die Ausrechnung von Zahlenbeispielen gelegt, die zur Erläuterung und Bestätigung des genannten Reciprocitätsgesetzes passend erscheinen.

Der Preis beträgt 1000 Mark.

Die Bewerbungsschriften müssen bis zum 1. Februar 1899 oder 1901 eingeliefert werden. Sie sollen mit einem Spruch versehen und von einem verschlossenen Brief begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers.

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1899.

Sekretäre.

Friedrich Leo, Dr. ph., Professor.
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. phil., Professor, Geheimer Regierungs-Rath.

Ordentliche Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Hermann Wagner, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Professor, Geh. Justizrath, seit 1881.
Franz Kielhorn, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1882.
Karl Dilthey, Dr. ph., Professor, seit 1892.
Wilhelm Meyer, Dr. ph., Professor, seit 1892.
Julius Wellhausen, Dr. th. und Dr. ph., Professor, seit 1892.
Max Lehmann, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1893.
Gustav Cohn, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Professor, seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Gustav Roethe, Dr. ph., Professor, seit 1893.
Paul Kehr, Dr. ph., Professor, seit 1895.
Georg Kaibel, Dr. ph., Professor, seit 1897.
Richard Pietschmann, Dr. ph., Professor, seit 1897.
Wilhelm Schulze, Dr. ph., Professor, seit 1898.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Georg Meissner, Dr. med., Professor, Geh. Medicinalrath, seit 1861.

Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1874. D. z. Sekretär.

Eduard Riecke, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)

Adolf von Koenen, Dr. ph., Professor, Geh. Bergrath, seit 1881.

Woldemar Voigt, Dr. ph., Professor, seit 1883.

Friedrich Merkel, Dr. med., Professor, seit 1885.

Theodor Liebisch, Dr. ph., Professor, seit 1887.

Felix Klein, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1887. (Zuvor Assessor, seit 1871, Correspondent seit 1872.)

Gottfried Berthold, Dr. ph., Professor, seit 1887.

Albert Peter, Dr. ph., Professor, seit 1889.

Otto Wallach, Dr. ph., Professor, Geh. Regierungsrath, seit 1890.

Johannes Orth, Dr. med., Professor, Geh. Medicinalrath, seit 1893.

Wilhelm Schur, Dr. ph., Professor, seit 1893.

David Hilbert, Dr. ph., Professor, seit 1895.

Walther Nernst, Dr. ph., Professor, seit 1898.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Professor, seit 1884.

Ehren-Mitglied.

Adolf Frhr. von Nordenskiöld, zu Stockholm, seit 1879. (Zuvor Correspondent, seit 1871.)

Auswärtige Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Theodor Mommsen, Dr., Professor, zu Charlottenburg, seit 1867. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)

Carl Hegel, Dr. ph. et jur., Professor, Geh. Rath, zu Erlangen, seit 1871. (Zuvor Correspondent, seit 1857.)

Adolf Kirchhoff, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1881. (Zuvor Correspondent, seit 1865.)

Theodor Nöldecke, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Leopold Delisle, Administrateur général de la bibl. nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Theodor von Sickel, Dr., Professor, Hofrath, zu Rom, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1868.)

Julius Oppert, Professor, zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent, seit 1876.)

M. J. de Goeje, Professor, zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspondent, seit 1872.)

Gaston Paris, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1889.

Julius Ficker von Feldhaus, Dr., Professor, Hofrath, zu Insbruck, seit 1889. (Zuvor Correspondent, seit 1866.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts, zu Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

L. Duchesne, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Max Müller, Professor, zu Oxford, seit 1891. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Friedrich Bechtel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor, seit 1882.)

Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.

P. Heinrich Denifle, Sotto archivista della S. Sede, zu Rom, seit 1896.

Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr. ph., Geh. Regierungsrath, seit 1897. (Vorher seit 1892 ordentliches Mitglied.)

Mathematisch-physikalische Klasse.

Robert Bunsen, Dr., Großherzogl. Bad. Geheimer Rath I. Klasse, und Professor, Excellenz, zu Heidelberg, seit 1855.

Richard Dedekind, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

William Thomson Lord Kelvin, Professor, zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent, seit 1859.)

Joseph Dalton Hooker, Direktor der Königlichen Gärten, zu Sunnigdale, seit 1865.

Carl Neumann, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Eduard Frankland, Professor der Chemie, zu Reigate, seit 1873.

Max von Pettenkofer, Dr., Geheimer Rat und Ober-Medicinalrath, Präsident der k. bayrischen Akademie der Wissensch., Professor zu München, seit 1874.

Alex Williamson, zu London seit 1874.

Charles Hermite, Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Paris, seit 1874. (Zuvor Correspondent, seit 1861.)

Lazarus Fuchs, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1875. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1874.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Geh. Regierungsrath, Präsident der

phys.-techn. Reichsanstalt, Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assessor, seit 1867.)

Luigi Cremona, Professor, Senator und Direktor der Ingen.-Schule des Königreichs Italien zu Rom, seit 1880. (Zuvor Correspondent, seit 1869.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geheimer Rat, Excellenz, Professor, zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1862.)

Sir Gabriel Stokes, Professor, zu Cambridge, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1864.)

Arthur Auwers, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, beständ. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent, seit 1871.)

Eugenio Beltrami, Professor, zu Rom, seit 1883. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Johannes Reinke, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1882.)

Wilhelm Foerster, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1886. (Zuvor Correspondent, seit 1875.)

Ludwig Boltzmann, Dr., Professor, K. K. Hofrath, zu Wien, seit 1887. (Zuvor Correspondent, seit 1882.)

Carl Klein, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1887.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1879.)

Karl Gegenbauer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1891.

Adolf von Bayer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1879.)

Eduard Suess, Dr., Professor der k. Akademie der Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)

Herm. Amandus Schwarz, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1875, Correspondent seit 1869.)

Henri Poincaré, Professor, zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent, seit 1884.)

Heinrich Weber, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied, seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Alexander Agassiz, Professor, zu Cambridge, U. St. A., seit 1898, Correspondent seit 1879.)

Robert Helmert, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Potsdam, seit 1898, Correspondent seit 1896.

Correspondenten.

Philologisch-historische Klasse.

Leo Meyer, Dr., Professor, Wirkl. Staatsrath, Excellenz, zu Dorpat, seit 1865. (Zuvor Assessor, seit 1861.)

Theodor Aufrecht, Dr., Professor, zu Bonn, seit 1871.

Ulrich Köhler, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1871.

William Stubbs, D. D. Rt. Rev. Bishop of Oxford, Cuddesdon Palace near Oxford, seit 1872.

Ferdinand Justi, Dr., Professor, Geh. Regierungsrat, zu Marburg, seit 1875.

Stephanos Kumanudes, Dr., Professor, zu Athen, seit 1876.

Ludwig Hänselmann, Dr., Professor, Stadtarchivar, zu Braunschweig, seit 1878.

Adolf Michaelis, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1879.

Georg Hoffmann, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1881.

Franz Bücheler, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1881.

Wolfgang Helbig, Dr., Professor, zu Rom, seit 1882.

Otto Benndorf, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1883.

Curt Wachsmuth, Dr., Professor, Geh. Hofrat, zu Leipzig, seit 1884.

Heinrich Nissen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1884.

Adalbert Bezzenberger, Dr., Professor, zu Königsberg, seit 1884.

J. F. Fleet, Dr., zu London, seit 1885.

Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrath, zu Dresden, seit 1885.

Johannes Vahlen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, best. Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.

Percy Gardner, Professor, zu Oxford, seit 1886.

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1886.

Adolf Köcher, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1886.

Charles Piot, Archivar, zu Brüssel, seit 1886.

Joh. Gottfried Wetzstein, Dr., Konsul a. D., zu Berlin, seit 1886.

Eugen Petersen, Dr., Professor, Sekretär des archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1887.

Hermann Usener, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1887.

Sophus Bugge, Dr., Professor, zu Christiania, seit 1887.

Ignazio Guidi, Professor, zu Rom, seit 1887.

Wilhelm Pertsch, Dr., Ober-Bibliothekar, Geh. Hofrath, zu Gotha, seit 1889.
Adolf Erman, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1888.
Constantin Höhlbaum, Dr., Professor, zu Gießen, seit 1889.
Karl Koppmann, Dr., Stadtarchivar, zu Rostock, seit 1889.
Richard Pischel, Dr., Professor, zu Halle, seit 1889.
Sir Clemens Robert Markham, zu London, seit 1890.
Hermann Oldenberg, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1890.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Charles Gross, Professor, zu Cambridge, Mass., U. St. A., seit 1891.
Konstantinos Kontos, Professor, zu Athen, seit 1892.
Moritz Ritter, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1892.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1892.
Henry Harisse, zu Paris, seit 1892.
Ludwig Traube, Dr., Privatdocent a. d. Universität München, seit 1894.
Wilhelm von Bippen, Dr., Staatsarchiv und Senatssekretär, zu Bremen, seit 1894.
Dietrich Schaefer, Dr., Professor, zu Heidelberg, seit 1894.
Edward Schröder, Dr., Professor, zu Marburg, seit 1894.
Albert Hauck, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1894.
Adolf Jülicher, Dr., Professor, zu Marburg i. H., seit 1894.
Wilhelm Wilmanns, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn a. Rh., seit 1894.
Hermann Möller, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1894.
Hermann Jacobi, Dr., Professor, zu Bonn a. Rh., seit 1894.
Heinrich Zimmer, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Greifswald, seit 1894.
August Mau, Dr., Professor und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1894.
Maxime Collignon, Dr., Professor, an der faculté de lettres, Paris, seit 1894.
F. Hultsch, Dr., Government Epigraphist, zu Bangalore, seit1895.
Elias Steinmeyer, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1895.
Eduard Meyer, Dr., Professor, zu Halle a/S., seit 1895.
Otto Seek, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1895.
Oswald Holder-Egger, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1896.
Max Rieger, Dr. ph., zu Darmstadt, seit 1897.
Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Heinrich Limpricht, Dr. med. et ph., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor, seit 1857.)

Georg Quincke, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1866.

Rudolf Lipschitz, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Bonn, seit 1867.

Robert Mallet, Mitglied der Royal Society zu London, seit 1869.

Elwin Bruno Christoffel, Dr., Professor a. D., zu Straßburg, seit 1869.

Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Professor, zu Greifswald, seit 1869.

Georg Salmon, Professor, Provost des Trinity College zu Dublin, seit 1869.

Carl Friedrich Rammelsberg, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Lichterfelde bei Berlin, seit 1870.

Paul Gordan, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1870.

Eduard Pflüger, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Bonn, seit 1872.

Adolf Mayer, Dr., Professor, zu Leipzig, seit 1872.

Karl Anton Bjerknes, Dr., Professor, zu Christiania, seit 1873.

Johannes Thomae, Dr., Professor, zu Jena, seit 1873.

Henry Enfield Roscoe, Professor, zu London, seit 1874.

Johann Strüver, Dr., Professor, zu Rom, seit 1874.

Leo Königsberger, Dr., Professor, Großh. Bad. Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1874.

Ferdinand Frh. von Richthofen, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1875.

William Huggins, Professor, zu London, seit 1876.

Joseph Norman Lockyer, Professor, zu London, seit 1876.

Wilhelm Waldeyer, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, best. Sekretär der K. Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1877.

Theodor Reye, Dr., Professor, zu Straßburg, seit 1877.

Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Professor, zu Wien, seit 1877.

Gösta Mittag-Leffler, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1878.

Georg Cantor, Dr., Professor, zu Halle, seit 1878.

Karl von Voit, Dr., Professor, Geheimer Rath und Obermedicinalrath, zu München, seit 1879.

Wilhelm Hittorf, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Münster, seit 1879.

Friedrich Beilstein, Dr., Professor, Staatsrath, zu St. Petersburg, seit 1880.

Wilhelm His, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Leipzig, seit 1880.

Ulisse Dini, Professor, zu Pisa, seit 1880.

H. Rosenbusch, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Heidelberg, seit 1882.

R. Fittig, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1882.

Ferdinand Lindemann, Dr., Professor, zu München, seit 1882.

Ludwig Kiepert, Dr., Professor, zu Hannover, seit 1882.

Franz Eilhardt Schulze, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1883.

Gaston Darboux, Dr., Professor, zu Paris, seit 1883.

Wilhelm Conrad von Röntgen, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Würzburg, seit 1883.

Ludwig Sylow, Dr., zu Frederickshall, seit 1883.

Gustav Tschermak, Dr., Professor, Hofrath, zu Wien, seit 1884.

Theodor Wilh. Engelmann, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1884.

Emile Picard, Professor, zu Paris, seit 1884.

Edouard Bornet, Professor, zu Paris, seit 1885.

Wilhelm Pfeffer, Dr., Professor, Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1885.

James Hall, Professor, zu Albany (New-York), seit 1885.

Ludimar Hermann, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Königsberg, seit 1886.

Gustav Retzius, Dr., Professor, zu Stockholm, seit 1886.

Ferdinand Zirkel, Dr., Professor, Geh. Bergrath, zu Leipzig, seit 1886.

J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.

Georg Frobenius, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.

William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.

Julius Weingarten, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1886.

Walther Flemming, Dr., Professor, zu Kiel, seit 1887.

Hermann Vogel, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Potsdam, seit 1887.

Emil Warburg, Dr. ph., Professor, zu Berlin, seit 1887.

Ernst Mach, Dr., Professor, Regierungsrath, zu Wien, seit 1887.

Hermann Vöchting, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.

Eugen Warming, Dr., Professor, zu Kopenhagen, seit 1888.

Simon Newcomb, Professor, Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.

Alexander Brill, Dr., Professor, zu Tübingen, seit 1888.

Karl von Kupffer, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1889.

Sir Archibald Geikie, Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom zu London, seit 1889.

Otto Bütschli, Dr., Professor, Hofrath, zu Heidelberg, seit 1889.

E. W. Beneke, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1889.

J. Willard Gibbs, Professor, zu Newhaven, seit 1889.

F. Fouqué, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1891.

Friedrich Prym, Dr., Professor, zu Würzburg, seit 1891.

Max Bauer, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Marburg, seit 1892.

Camillo Golgi, Professor, zu Pavia, seit 1892.

Friedrich Leopold Goltz, Dr., Professor, zu Straßburg i. E., seit 1892.

Victor Hensen, Dr., Professor, Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1892.

Alexander von Karpinsky, Excellenz, Präsident des Comité geologique, zu St. Petersburg, seit 1892.

Dmitri Mendelejeff, Dr., Professor, zu St. Petersburg, seit 1892.

Simon Schwendener, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1892.

Karl von Zittel, Dr., Professor, Geh. Rath, zu München, seit 1892.

Heinrich Bruns, Dr., Professor, Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1892.

J. H. van't Hoff, Dr., Professor, zu Berlin, seit 1892.

Henry A. Rowland, Professor, zu Baltimore, seit 1892.

Max Nöther, Dr., Professor, zu Erlangen, seit 1882.

Adolf Hurwitz, Dr., Professor, zu Zürich, seit 1892.

Wilhelm von Bezold, Dr., Professor, Geh. Regierungsrath, zu Berlin, seit 1897.

Von der philosophischen Facultät der Georg-August-Universität in Göttingen wird zur Veröffentlichung folgendes mitgetheilt.

Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1899, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Consistorialrathes Carl Gustav Beneke, wurde in öffentlicher Facultätssitzung das Resultat der Preisbewerbung für das Jahr 1899 verkündet.

Mit dem Motto „*Nur schrittweise dürfen wir vordringen, wenn wir den Bau der Berge recht verstehen wollen*", ist rechtzeitig eingeliefert eine Arbeit über die Beneke-Preisaufgabe „*Geologische Beschreibung des Ith und seiner direkten Fortsetzungen, namentlich auch der Verhältnisse, welche sein Ende im Süden bei Eschershausen bedingen, sowie seine Hakenbiegung und sein Ende im Norden bei Lauenstein-Coppenbrügge, sowie genaue Untersuchung der Juraformation des Ith und ihrer Beziehungen zu allen sonst im nordwestlichen Deutschland unterschiedenen Gliedern des Jura*; der Arbeit ist eine Uebersichtskarte nebst allen Belegstücken beizufügen."

Die Arbeit behandelt die verschiedenen Theile des Themas recht ungleichmäßig, wie auch der Verfasser selbst im Vorwort angiebt. Die Beschreibung des stratigraphischen und tektonischen Baues ist für die festeren Gesteine des oberen Jura wesentlich genauer und ausführlicher, als für die mürberen des mittleren und unteren Jura, doch ist dies dadurch bedingt, daß in den ersteren weit bessere Aufschlüsse zu finden sind, während für die letzteren die Lagerung der darunter folgenden Triasschichten mit untersucht werden mußte, um einen Anhalt über wesentlichere Querbrüche zu gewinnen.

Die Beschreibung wird vervollständigt und anschaulich gemacht durch die beigefügte geologische Specialkarte im Maßstabe von 1:25000 auf den Meßtischblättern Alfeld, Eschershausen, Salzhemmendorf und Eldagsen, deren Aufnahme bedeutend über die Anforderungen der Aufgabe hinausgeht.

Dagegen ist die Vergleichung mit den sonstigen Jurabildungen des nordwestlichen Deutschlands entschieden nicht so vollständig, wie gewünscht wurde, und findet sich, statt in einem besonderen Abschnitte, eingestreut im stratigraphischen Theile bei den einzelnen Etagen.

Die Litteratur-Verzeichnisse sind wohl annähernd vollständig.

Jedenfalls ist aber der Mangel an ausreichender Vergleichung mit den anderen Jurabildungen reichlich ausgeglichen durch die Lieferung der geologischen Specialkarte, welche sicher sehr viele Mühe und Zeit in Anspruch genommen hat, sodaß eben für die Ausarbeitung der Vergleichung nicht mehr genügende Zeit blieb. Die Karte ist aber sehr werthvoll, liefert viel Wissenschaftlich-Neues, läßt den Bau des Ith klar erkennen und ist in den wesentlicheren Gebieten sorgfältig hergestellt und richtig, sodaß die Facultät kein Bedenken trägt, dem Verfasser den vollen Preis zuzuerkennen.

Die Eröffnung des der Arbeit beigelegten verschlossenen Couvertes mit dem Motto „Nur schrittweise dürfen wir vordringen, wenn wir den Bau der Berge recht verstehen wollen“ ergab als Verfasser

Herrn Dr. Alexander Steuer, Privatdocent für Mineralogie und Geologie an der Universität Jena.

Für das Jahr 1902 stellt die Facultät folgende Preisaufgabe:

„Es wird eine quellenmäßig belegte, auf ein möglichst umfangreiches Material gestützte Geschichte der Bücherpreise in Deutschland seit Erfindung der Buchdruckerkunst, besonders aber seit dem Anfang des 18. Jahrhunderts gewünscht. Dabei wird unter steter Rücksicht auf die jeweiligen wirthschaftlichen und litterarischen Verhältnisse und die verschiedenen Absatzbedingungen für die einzelnen Zweige der Litteratur der Antheil zu ermitteln sein, welcher in den verschiedenen Zeiten durchschnittlich von dem Preise der Bücher auf ihre Herstellung und ihren Vertrieb entfällt. Ebenso wie den Ursachen der Preisansätze und ihres Wechsels ist ihren Folgen nachzugehen und der Einfluß darzustellen, welchen die Bücherpreise auf den Buchhandel selbst, die litterarische Produktion, sowie die Verbreitung von Bildung und Kenntnissen ausgeübt haben. Die entsprechenden Verhältnisse anderer Länder sind nur vergleichungsweise, außerdem aber dann zu berücksichtigen, wenn zur Beurtheilung der deutschen Verhältnisse nicht

ausreichender Stoff vorhanden ist, und ihre Uebereinstimmung sich annehmen läßt."

Bewerbungsschriften sind in einer modernen Sprache abzufassen und bis

zum 31. August 1901,

auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung trägt, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden.

Auf dem Titelblatte der Arbeit oder dem beigelegten Couvert muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, wenn sie nicht preiswürdig befunden werden sollte.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise geschieht am 11. März 1902 in öffentlicher Sitzung der unterzeichneten Facultät.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1899 und 31. August 1900 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mittheilungen, von 1897 und 1898.

Göttingen, d. 1. April 1899.

Die philosophische Facultät.

Der Dekan

W. Voigt.

Verzeichniß
der im Jahre 1898 eingegangenen Druckschriften[1]).

A. Gesellschaftsschriften.

Aachen. Zeitschrift des Aachener Geschichtsvereins. Bd. 20. 1898.

Aargau. Taschenbuch der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau f. d. J. 1897.

Adelaide. Transactions of the R. Society of South Australia. Vol. 22. P. 1. 1898.

Agram. Ljetopis Ingoslavenske Akademije Znanosti i Umjetnosti. Svezak. 12. Zagrebu 1898.

Altenburg. Mittheilungen der Geschichts- und Altertumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Bd. 11. H. 1. 1898.

Amiens. Bulletins de la société des antiquaires de Picardie. Paris-Amiens. Année 1895. No. 4. — Année 1896. No. 1. — Année 1897. No. 1—4.

Amsterdam. Verhandelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen. Afd. Natuurkunde: 1. Sectie, Deel. 6. No. 1—5. 1897—98. — 2. Sectie: Deel 6. No. 1/2. 1897—98. — Afd. Letterkunde: Deel 2. No. 1. 2. 1898.

— Verslagen en mededeelingen der Koninkl. Akademie van Wetenschappen. Afd. Letterkunde: 4. Reeks. Deel 1—2. 1897—98.

— Verslagen van de gewone vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afd. der Koninkl. Akad. van Wetenschappen. 1897—98. Deel 6. (1898).

— Tijdschrift van het Koninkl. Nederlandsch Aardrijkskundig Genootschap. Ser. 2. Deel 15, 1898. No. 1—5.

---

1) Der Druckort ist nur dann besonders angegeben, wenn er nicht mit dem Sitz der Gesellschaft zusammenfällt. Das Druckjahr ist, wo es dem Jahrgang einer Zeitschrift nicht entspricht, in Klammern hinzugefügt.

Amsterdam. Revue semestrelle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. T. 6. 1897 (1898).

— Nieuw Archief voor Wiskunde. 2. R. Deel 3. St. 3—4. 1897/98.

— Wiskundige opgaven met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel 7. Stuck 5. 1898.

Antwerpen. Bulletin de la Société Royale de géographie d'Anvers. T. 21. Fasc. 3. 1896—97. — T. 22. Fasc. 1—2. 1898.

Athen. *Ἀθηνᾶ. Σύνγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας.* T. 9. τ. 3. 4. 1897. — T. 10. τ. 1—3. 1898.

— Mittheilungen des Kaiserl. deutschen archaeologischen Instituts. Athenische Abtheilung. Bd. 22. Heft 4. 1897. — Bd. 23. Heft 1—3. 1898. — Register zu Bd. 16—20. 1897.

Augsburg. Zeitschrift des historischen Vereins für Schwaben und Neuburg. Jahrg. 24. 1897.

Baltimore. Johns Hopkins University Circulars. Vol. 15. No. 132—136. 1897—98.

— American Journal of Mathematics. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 19. No. 4. 1897. — Vol. 20. No. 1—3. 1898.

— Johns Hopkins University Studies. 15. Series. No. 6—12. 1897. — 16. Series. No. 1—9. 1898.

— Maryland geological Survey. Vol. 1. 1897.

Basel. Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 12. Heft 1. 1898.

Batavia. Notulen van de Algemeene en Bestuurs-Vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel 35. Afl. 1. 2. 1897.

— Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Deel 50. St. 3. 1897.

— Tijdschrift voor indische taal-, land- en volkenkunde uitgeg. door het Batav. Genootschap van Kunsten en Wetensch. Deel 40. Afl. 1—2. 1897.

— Nederlandsch-Indisch Plakaatboek 1602—1811 dor J. A. van der Chijs. Uitgeg. door het Bat. G. v. K. e. W. Deel 16. 1897.

— Regenwaarnemingen in Nederlandsch Indië door J. P. van der Stock. Jaarg. 18. 1896 (1897).

Batavia. Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Uitgeg. door de Koninkl. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 57 (= X, 1). 1898.

— Boekwerken, ter tafel gebracht in de vergaderingen van de directie der Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië gedurende het jaar 1897 (1898).

— Van der Stock, Wind and weather, currents, tides and tidal streams in the East Indian Archipelago. 1897.

Bayreuth. Archiv für Geschichte und Altertumskunde von Oberfranken. Hrsg. v. d. histor. Verein für Oberfranken zu Bayreuth. Bd. 20. H. 2. 1897.

Bergen. Bergens Museum Aarsberetning for 1897 (1898).

Berkeley. University of California. The University Chronicle. An official record. Vol. 1. No. 1. 1898.

— Annual Report of the secretary to the board of regents for the year ending June 30. 1896. — Address of regent J. B. Reinstein. S. Francisco 1898.

— Register of the University 1896/97.

— Department of philosophy. G. H. Howisen, On the correlation of elementary studies. Sacramento 1896. — Report to the joint committee of the board of regents 1895. — Addendum to a report made to the joint committee of the regents. 1895. — Reference list to the published writings of John Muir. 1897.

— College of Agriculture. The beet sugar industry and its development in California. Sacramento 1896.

— Board of State Viticultural Commissioners. Report of committee on ways and means. Sacramento 1896. — Resistant vines. Ibid. 1897.

Berlin. Abhandlungen der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu B. aus d. J. 1897.

— Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. der Wissensch. zu B. Jahrg. 1897. No. 40—53. — Jahrg. 1898. No. 1—30.

— H. C. Vogel, Einige Bemerkungen über den Kirchhoff'schen Spectralapparat. (Aus: Sitzungsberichten . . . 1898. No. 10).

— Acta Borussica. Behördenorganisation. Bd. 2. 1898.

— Korrespondenzblatt des Gesammtvereins der deutschen Geschichts- und Alterthumsvereine. Jahrg. 46. 1898.

— Mittheilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Jahrg. 8. H. 1—3. 1898.

Berlin. Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 17. No. 1—9. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte Berlins. 1898.

— Schriften des Vereins für die Geschichte Berlins. Heft 34. 1898. — Heft 35. 1898.

— Verzeichnis der Mitglieder des Vereins für die Geschichte Berlins. 1898. No. 28 (Juli).

— Zeitschrift des Vereins für Volkskunde. Jahrg. 8. 1898.

Bern. Jahrbuch für schweizerische Geschichte. Hrsg. auf Veranstaltung der Allgemeinen Geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 23. Zürich 1898.

— Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. 1888, 1890, 1891, 1895, 1896, 1897.

Bologna. Memorie della R. Academia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Ser. 5. T. 6. 1896—97.

Bonn. Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. H. 102. 1898. — H. 103. 1898.

Bordeaux. Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Ser. 5. T. 3. Cah. 1. 1898.

— Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Années 1894/95. 1895/96. 1896/97.

— Commission météorologique de la Gironde. Observations pluvio-metriques et thermométriques. 1896/97 (1897).

Boston. Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. 12. No. 4. 1897.

— Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. N. S. Vol. 25. No. 1—4. 9. 1895/96. — Vol. 27. 1897/98. — Vol. 26. No. 1. 1898/99. — 4 Separat-Abzüge von E. L. Mark.

— Technology quarterly and proceedings of the Society of arts. Vol. 11. No. 2. 1898.

— Memoirs read before the Boston Society of Natural History. Vol. 5. No. 3. 1898.

— Proceedings of the Boston Society of Natural History. Vol. 28. No. 6—12. 1898.

Braunsberg. Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde Ermlands. Bd. 11. H. 4. 1897. — Bd. 12. H. 1. 1897.

Braunschweig. Beiträge zur Anthropologie Braunschweigs. Festschrift zur 29. Versammlung der deutsch-anthropologischen Gesellschaft zu Br. 1898.

— Beiträge zur wissenschaftlichen Medicin. Festschrift dargeboten den medicinischen Theilnehmern der 69. Versammlung der Deutschen Naturforscher und Aerzte vom Herzogl. Braunschweig. Staatsministerium. Hrsg. v. R. Beneke. 1897.

— Festgruß gewidmet der 69. Versammlung . . . vom Verein für Naturwissenschaft in Braunschweig. 1897.

— Festschrift der Herzogl. Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina . . . bearb. von Mitgliedern des Lehrkörpers der . . . und hrsg. von H. Beckurts. 1897.

Bremen. Abhandlungen hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Verein zu Br. Bd. 14. H. 3. — Bd. 15. H. 1. 1895. H. 2 (= Beiträge zur nordwestdeutschen Volks- u. Landeskunde. Hrsg. v. Naturw. Verein zu Br. H. 2). 1898.

Bremerhaven. Jahresbericht der Männer vom Morgenstern. Heimatbund in Nordhannover. H. 1. 1898.

Breslau. Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 74. Folge. 1898. — Ergänzungsh. 6. 1898.

— Schlesiens Vorzeit in Bild und Schrift. Zeitschrift des Vereins für das Museum schlesischer Alterthümer. Bd. 7. H. 3. 1898.

Brisbane. Proceedings of the Royal Society of Queensland. Vol. 13. 1898.

Bromberg. Jahrbuch der Historischen Gesellschaft für den Netzedistrikt zu Br. Jahrg. 1898.

Brüssel. Annuaire de l'Academie Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 64. Année. 1898.

— Bulletin de l'Acad. Roy. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 68. Année. Ser. 3. T. 35. 1898. — T. 36. No. 7—10. 1898.

— Classe des lettres. Programme de concours pour l'année 1899/1901 (1898).

— Annales de l'Observatoire Royal de Br. (Uccle). Astronomiques. T. 7. 1896. — Météorologiques. T. 3. 4. 1895.

— Annuaire de l'Observatoire Royal de Br. (Uccle). Année 56—64. 1889—1897.

— Analecta Bollandiana. T. 17. No. 1—3. 1898.

— L'Art Public. Organe de l'oeuvre nationale belge. Année 2. Livr. 17. 18. 1898. — Année 3. Livr. 1. 2. Suppl. 1898.

Brüssel. Bulletin de la Société Belge de Microscopie. Année 24. 1897—98 (1998).

— Université libre de Bruxelles. Statuts organiques de l'université et programme des cours pour l'année académique 1896/97 (1897).

Budapest. Magyar Tudományos Akadémiai Almanach polgári és csillagászati naptárral. 1898-re.

— Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft redig. v. J. Fröhlich. Bd. 14. 1895—96.

— Araneae Hungaricae secundum collectiones a Leone Becker pro parte perscrutatas conscriptae a Cornelio Chyzer et Ladislao Kulczynski. T. 2. P. 2. 1897.

— Értekezések a Magyar Tudomán. Akadém. nyelv-és széptudományi osztálya köreböl. Kötet 16. Szam 10. 1897.

— Értekézesek a történelmi tudományok köreböl. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 17. Szam 2. 5—8. 1898.

— Archaeologiai Ertesitó. A Magyar. Tudom. Akad. arch. bizottságának es, az orsz. régészeti s. emb. társulatnak közlönye, szerkesti Hampel József. Uj folyam kötet 17. Szam 4—5. 1897. — Kötet 18. Szam 1—4. 1898.

— Mathematikai és természettudományi Értesitö. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 15. Füz. 4—5. 1897. — Kötet 16. Füz. 1—2. 1898.

— Archaeologiae Közlemények hazai müemlékek ismeretének elömozditására. Kiadja a Magyar tudományos Akadémia. Kötet 20. 1897.

— Mathematikai és természettudományi Közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a Magyar tudományos Akadémia. Kötet 27. Szam 1. 1897. — Szam 2. 1898.

— Nyelotudományi Közlemények. Kiadja a Magyar Tudom. Akad. Kötet 27. Füz. 3. 4. 1897. — Kötet 28. Füz. 1. 2. 1898.

— Hunyadiok Kora Magyarországon szerkeszti Csánki Dezsökötet 8. 1897.

— Monumenta Hungariae historica. Magyar történelmi Emlékek kiadja a Magyar Tudom. Akad. történelmi bizottsága I. Osztály. Monumenta comitialia regni Transsylvanicae. Kötet 20 (1688—1691). 1897.

— Monumenta Hungariae juridico-historica. Corpus statutorum. Tom. 4. Pars 2. 1898.

Budapest. Rapport sur les travaux de l'Acad. Hongroise des Sciences en 1897 (1898).
— József Bayer, A Magyar Drámairodalom Förténete. 1897.
— R. Francé, A craspedomonadinák szervezete. 1897.
— József Hampel, A régibb Középkor (IV—X. Ságad). Emlékei Magyar-houban. 2. Rísz 1897.
— R. Kohaut, A magyaroiszági szitakötö-félék természctrajza etc. 1896.
— Ign. Kurländer, Földmágnességi mérések etc. 1896.
— G. Primics, A csetráshegység geologiája etc. 1896.
— Zsigmond Róna, A légnyomás a magyar birodolamban. 1861-töl 1890-ig. 1897.
— G. Szádeczky, A zempléni szigethegysée etc. 1897.

— A Magyar Korona Országainak Mezögazdasági Statisztikája = Landwirtschaftliche Statistik der Länder der Ungarschen Krone. Bd. 2—3. 1897.
— Jahresbericht der Königl. Ungarischen Geologischen Anstalt f. 1895 (1898). — f. 1896 (1898).
— Földtani Közlöny. Geologische Mittheilungen. Zeitschrift der Ungar. Geol. Gesellschaft. Kötet 27. Füz. 8—12. 1897. — Kötet 28. Füz. 1—6. 1898.
— Mittheilungen aus dem Jahrbuch der Königl. Ungarischen Geologischen Anstalt. Bd. 11. Heft 6—8. 1897. — Generalregister zu Bd. 1—10. 1898.
Buenos Aires. Anales de la Oficina meteorológica Argentina. T. 12. 1898.

— Anales de la Sociedad Cientifica Argentina. T. 44. Entr. 6. 1897. — T. 45. T. 46. Entr. 1—4. 1898. — Juan Valentin, Indice generale (T. 1—40) 1897.
— Bulletin mensuel de statistique municipale de la ville de Buenos Aires. Année 12. No. 7. 1898.
— Communicaciones del museo nacional de Buenos Aires. T. 1. No. 1. 1898.
Buffalo. Bulletin of the Buffalo Society of Natural Sciences. Vol. 5. No. 5. 1897. — Vol. 6. No. 1. 1898.
Bukarest. Analele Academiei Romane. Parte a administrativă şi desbaterile. Ser. 2. T. 20 (1897/98) 1898. — Memoriile seçtiuni istorice. T. 19 (1896/97) 1897. — Memoriile seçtunii scientifice. T. 18. (1895/96) 1897.
— Arth. Gorovei, Cimiliturile Românilor 1898.

Bukarest. B. Petric Hasden, Etymologicum magnum Romaniae. T. 4. Introductio. 1898.

Calcutta. Bibliotheca Indica: a collection of oriental works publ. by the Asiatic Society of Bengal. N. S. 901—909. 1897—98.

— Memoirs of the Geological Survey of India. Vol. 27. P. 2. 1896 (1898). — Palaeontologia Indica. Series 15. Vol. 1. P. 4. 1897. — Vol. 2. P. 1. 1897. — Series 16. Vol. 1. P. 2. 3. 1897.

— General Report on the work carried on by the Geological Survey of India. 1897/98 (1898).

Cambridge. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 9. P. 7—9. 1897—98.

— Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 16. P. 3—4. 1897/98. — Vol. 17. P. 1. 1898.

— Mass. Bulletin of the Museum of Comparative Zoology at Harward College. Vol. 28. No. 4—5. 1898. — Vol. 30. No. 5—6. 1897. — Vol. 31. No. 3—7. 1897. — Vol. 32. No. 1—8. 1898.

— Memoirs of the Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Vol. 23. No. 1. 1897.

Cassel. Ahhandlungen und Berichte des Vereins für Naturkunde zu C. 43. 1897/98 (1898).

— Mittheilungen an die Mitglieder des Vereins für hessische Geschichte und Landeskunde. Jahrg. 1896 (1897). — Jahrg. 1897 (1898).

— Zeitschrift des Vereins für hessische Geschichte und Landeskunde. N. F. Bd. 23 (= 33) 1898. — 12. Suppl. 1898.

Charkow. Annales de l'Université Impér. de Ch. 1897, 4. — 1898, 1—4. — M. Tikhomandritzky, Cours de la théorie des probabilités. 1898.

— Communications de la Société Mathématique de Ch. Ser. 2. T. 6. No. 2—4. 1897.

— P. Ju. Kul, Provincial' nija sobranija u rimljan'. 1898.

Charlottenburg. Die Thätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt i. d. Zeit vom 1. Febr. 1897 bis 31. Jan. 1898 (S.-A.) Berlin 1898.

Chemnitz. Deutsches Meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem des Kgr. Sachsen. Ergebnisse. 13. Jahrg. Abt. 3. 1895 (1898). — 14. Jahrg. Abt. 1. 2. 1896 (1898).

— Das Klima des Königreichs Sachsen. Amtliche Publication des Königlich sächsischen meteorologischen Institutes. H. 5. 1898.

Cherbourg. Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 30. 1896—97.

— Auguste Le Jolis, Remarques sur le nomenclatur algologique (Extr. des Mémoires . . T. 30) 1896.

Chicago. The Open Court. Vol. 12. 1898.

— The Monist. A quarterly magazine. Vol. 8. No. 3—4. 1897. — Vol. 9. No. 1. 1898.

— The John Crerar Library. Annual Report. y. 1897 (1898).

Christiania. Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i. Chr. 1897 (1897/98).

— Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i. Chr. Math.-Naturw. Cl. 1897. — Histor.-filos. Cl. 1897.

Chur. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Bd. 41. 1897/98 nebst Beilage (1898).

Clausthal. Katalog der Bibliothek der vereinigten Königlichen Bergakademie und Bergschule. Saarbrücken 1898.

Cordoba. Boletin de la Academia Nacional de Ciencias en C. T. 15. Entr. 4. Buenos Aires 1897.

Desmoines. Jowa Geological Survey. Vol. 6. Report 1896 (1897). — Vol. 7. Report 1897 (1898).

Dorpat. Acta et commentationes imp. universitatis Jurjevensis (olim Dorpat) 1898. 1—4.

Dresden. Neues Archiv f. Sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. 18. 1898.

— Jahresbericht des Königl. Sächs. Altertums-Vereins über das 73. Vereinsjahr 1897/98 (1898).

— Die Sammlung des Königl. Sächs. Altertums-Vereins zu Dresden in ihren Hauptwerken. Lief. 1. 1898.

— Dresdener Geschichtsblätter. Hrsg. v. Verein für Geschichte Dresdens. Jahrg. 7. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte Dresdens. H. 1. 1872. — H. 2. 1875. — H. 4—10. 1883—1892.

— Jahresbericht des Vereins für Erdkunde zu Dr. 26. 1898.

Dublin. Proceedings of the R. Irish Academy. Ser. 3. Vol. 4. No. 4—5. 1897. — List of the members 1898.

— The Scientific Proceedings of the R. Dublin Society. N. S. Vol. 8. P. 5. 1897.

— The Scientific Transactions of the R. Dublin Society. Series 2. Vol. 5. P. 13. 1896. — Vol. 6. P. 2—13. 1896/97.

Düsseldorf. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichts-Vereins. Bd. 12. 1897. — Bd. 13. 1898.

— F. Schaarschmidt, Zur Erinnerung an Jakobe von Baden. 1897.

Edinburgh. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society. Vol. 16. 1897—98.

— Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 21. 1897.

— Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. 38. P. 3—4. 1897. — Vol. 39. P. 1. 1898.

— Proceedings of the Royal Physical Society of Edinburgh. Vol. 13. P. 3. 1896/97 (1897).

Eichstädt. Sammelblatt des Historischen Vereins Eichstädt. Jahrgang 2—7. 1887—1892. — Jahrg. 12. 1898.

Eisenberg. Mittheilungen des Geschichts- und Alterthumsforschenden Vereins zu Eisenberg. Heft 13. 1898.

Elberfeld. Zeitschrift des Bergischen Geschichtsvereins. Bd. 33 (N. F. 23) 1898.

Emden. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft i. E. 82. 1896/97 (1898).

Erfurt. Jahrbuch der Königl. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften zu E. N. F. Heft 24. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte und Alterthumskunde von E. H. 19. 1898.

Erlangen. Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Societät in E. H. 29. München 1897.

Florenz. Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazione italiane ricevute per diritto di stampa. 1898. No. 288—292. 294. 295. 304—309.

— Pubblicazioni del R. Istituto di studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di filosofia e filologia. No. 25. 1891. — No. 26. 1894. — Sezione di medicina e chirurg. No. 14. 1892. — No. 15. 1894. — No. 16. 17. 1895. — Sezione di scienze fisiche e natur. No. 19. 1891. — No. 20. 1891. — No. 21. 1895.

Frankfurt a. M. Mittheilungen über Römische Funde in Heddernheim. Herausg. von dem Verein für Geschichte und Alterthumskunde zu Fr. a. M. Heft 2. 1898.

— Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Fr. a. M. für 1896/97 (1898).

Frauenfeld. Thurgauische Beiträge zur vaterländischen Geschichte. Hrsg. vom Histor. Vereine des Kantons Thurgau. H. 37. 1897.

Freiburg i. Br. Freiburger Dioecesan-Archiv Bd. 26. 1898.

Genf. Bulletin de la Société d'histoire et d'archéologie de Genève. T. 2. Livr. 1. 1898.

Giessen. Mittheilungen des Oberhessischen Geschichtsvereins. N. F. Bd. 1—4. 1889—1893. — Bd. 7. 1898.

Görlitz. Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 74. 1898.

— Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Fasc. 2. 1897. — Fasc. 3. 1898.

Göteborg. Göteborgs Högskolas Årsskrift. Bd. 1. 1895. — Bd. 2. 1896. — Bd. 3. 1897.

— Göteborgs Kungl. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhälles Handlingar. 4. Följ. 1. Häft. 1898.

Granville. Bulletin of the scientific laboratories of Denison University. Vol. 9. P. 2. 1897.

's Gravenhage. Bijdragen tot de taal-, land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië uitgeg. door het Koninkl. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Volgreeks 6. Deel 5. 1898.

— N. Indië. Catalogus der Land- en Zeekaarten toebehoorende aan het K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indie. 1898.

Graz. Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen. Herausg. vom Historischen Verein für Steiermark. Jahrg. 28. 1897.

— Mittheilungen des Historischen Vereins für Steiermark. Heft 45. 1897.

Greenwich. Annals of the Cape Observatory. Vol. 3. 1896. — Vol. 4. 1897. — Vol. 6. 1897. — Vol. 7. 1896.

Greifswald. Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen. Jahrg. 29. 1897.

Guben. Niederlausitzer Mittheilungen. Zeitschrift der Niederlausitzer Gesellschaft für Anthropologie und Alterthumskunde. Bd. 5. H. 5—7. 1898.

Haarlem. Archives du Musée Teyler. Ser. 2. Vol. 5. P. 4. 1898. — Vol. 6. P. 1—2. 1898.

— Verhandelingen rakende den natuurlyken en geopenbaarden godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. Deel 16. 1898.

— Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publ.

par la Société Hollandaise des Sciences à H. 2. Sér. T. 1. 1897/98. — T. 2. Livr. 1. 1898.

Halifax. Proceedings and transactions of the Nova Scotian Institute of Natural Science. Vol. 9 = Ser. 2· 1894/95. Vol. 2. P. 3. (1897).

Halle. Leopoldina. Amtliches Organ der Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Heft 34. No. 1—11. 1897.

— Verhandlungen der Kaiserlich Leopoldino-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher. Nova acta acad. caesar. Leopold-Carol. German. naturae Curiosorum. T. 68—69. 1897—1898.

— O. Grulich, Katalog der K. L.-C. Akad. Bd. 2. H. 5 (= Lief. 8) 1897.

— Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Hrsg. v. d. Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. 11. No. 1. 1898.

— Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. 51. H. 4. 1897. — Bd. 52. H. 1—13. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu Halle. 1896—1897.

— Zeitschrift für Naturwissenschaften. I. A. des Naturwissenschaftl. Vereins für Sachsen und Thüringen hrsg. v. O. Lüdecke, 5. Folge. Bd. 8 (= 70). H. 3—6. Leipzig 1897. — Bd. 9 (= 71). H. 1/2. Ebend. 1898.

Hamburg. Mittheilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 3. H. 8. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für Hamburgische Geschichte. Jahrg. 18. 1897.

— Zeitschrift des Vereins für Hamburgische Geschichte. Bd. 10. H. 2. 1898.

— Verhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins in Hamburg. 4. Folge. Bd. 5. 1897 (1898).

Hannover. Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 44—47. 1893/94—1896/97 (1898).

— Katalog der Vogelsammlung aus der Provinz Hannover. 1897.

— Katalog der systematischen Vogelsammlung des Provinzialmuseums in Hannover. 1897.

— Verzeichniß der im Provinzialmuseum zu Hannover vorhandenen Säugethiere. 1897.

Heidelberg. Neue Heidelberger Jahrbücher. Hrsg. vom Historisch-Philosophischen Verein zu Heidelberg. Jahrg. 8. H. 1. 1898.

Helsingfors. Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar. 39. 1896/97 (1897).

— Acta societatis scientiarum Fennicae. T. 22—23. 1897.

— Observations météorologiques publiées par la Société des Sciences de Finlande. Vol. 15. Livr. 1 en 1896 (1897). — Résumé 1881—1890 (1897).

— Meddelanden af Societas pro fauna et flora Fennica. Häft 23. 1898.

— A. Heinrichs et E. Biese, Météorologie et magnetisme terrestre (Aus: Fennica 13). 1895.

— Finlands geologiska Undersökning (Text u. Karten). No. 32. 1896. — No. 33. 1898.

Hermannstadt. Jahresbericht des Vereins für Siebenbürgische Landeskunde für 1897/98 (1898).

— Archiv des Vereins für Siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. 28. H. 1. 2. 1898.

Kahla. Mittheilungen des Vereins für Geschichts- und Alterthumskunde zu Kahla und Roda. Bd. 5. H. 1—3. 1895—98.

Karlsruhe. 3 Schriften der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. 1897/98.

— Programm der Technischen Hochschule zu Karlsruhe für das Schuljahr 1898/99.

Kasan. Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan. Ser. 2. T. 7. No. 4. 1897. — T. 8. No. 1. 1898.

— Izvestija Kasanskago Universiteta. T. 1. 1865.

— Izvestija i učen'ija zapiski Kasanskago Universiteta. 1865. Vipusk 2—6. 1865—66.

— Učen'ija Zapiski . . . T. 65. No. 7—11. 1898.

Kempten. Allgäuer Geschichtsfreund. Zwanglose Mittheilungen, hrsg. vom Allgäuer Alterthums-Verein. Jahrg. 10. 1897.

Kiel. Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte. Bd. 27. 1897.

Kiew. Denkschriften der Gesellschaft der Naturforscher in Kiew. T. 14. No. 2. — T. 15. No. 1—2.

Klagenfurt. Archiv für vaterländische Geschichte und Topographie. Hrsg. von dem Geschichtsverein für Kärnten. Jahrg. 11—16. 1867—1886.

— Carinthia. Mittheilungen des Geschichtsvereins für Kärnten. Jahrg. 88. 1898.

Klagenfurt. Jahresbericht des Geschichtsvereins für Kärnten f. 1897 (1898).

Klausenburg. Értesitö az Érdélyi Muzeum-egylet orvos-természettudományi szakosztályából. Évfolyam 22. I. Füz. 2—3. 1897. — II. Füz. 2—3. 1898.

Köln. Annalen des Historischen Vereins für den Niederrhein. Bd. 63—66. 1897—98. — Jahresbericht der Handelskammer zu Köln f. 1897 (1898).

Königsberg. Schriften der Physikalisch-Oekonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Jahrg. 38. 1897 (1898).

Kopenhagen. Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1897. No. 4—6. — 1898. No. 1—3.

— Det Kong. Danske Vidensk. Selskabs Skrifter. Naturvidensk. og math. Afdeling. 6. R. Bd. 8. H. 6. 1898. — Histor. og philosoph. Afdeling. 6. R. Bd. 4. No. 4. 1898.

Krakau. Acta rectoralia. T. 1. Fasc. 4. 1893—1897.

— Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Krakau. 1897. No. 10. — 1898. No. 1—8.

— Najnowsze wydawnictwa Akademii Umiejętn. wydziałów filolog. i histor.-filozof. Piekosińskiego, Rycerstwo polskie wieków s'rednich. T. 1—2. Krakau 1896.

— Bibliotheka Pisarzów Polskich. No. 34/35. 1897.

— Materyały antropologiszno-archeologiczne i etnograficzne wydawane staraniem komisyi antropologicznej Akademii umiejctnosci w Krakowie. T. 2. 1897.

— Wydawnictwo komisyi antropologicznej . . .: Mich. Federowskiego, Lud białoruski na rusi litewskiej. Materiały do etnografii słowiańskiej zgromadzone w latach 1877—1891. T. 1. 1897.

— Rocznik zarrądu Akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1896/97 (1897).

— Rosprawy Akademic Umiejętności. Wydziat filol. Ser. 2. T. 11. 12. 1898. — Wydziat histor.-filozof. Ser. 2. T. 10. 1898. — T. 11. 1897.

— Sprawozdania Komisyi Fizyograficznej obejmujące proglad na czynności dokonane w ciągu roku. T. 32. 1897.

— Scriptores rerum Polonicarum. T. 16. 1897.

— Editio coll. jur. acad. litter. Cracov. Collectanea ex archivo collegii juridici. T. 5. 1897.

Krefeld. Verein für Naturkunde zu Krefeld. Jahresbericht 3. 1896/97—1897/98 (1898).

Krefeld. Verein für naturwissenschaftliches Sammelwesen zu Krefeld. Jahresbericht 1895/96 (1896).

Landshut. Verhandlungen des historischen Vereins für Niederbayern. Bd. 33. 1897. — Bd. 34. 1898.

Leiden. Handelingen en Mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te L. 1897/98 (1898).

— Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde uitg. vanwege de Maatschappij der Nederl. Letterkunde te L. Deel 17 (= N. Recks 9) 1898.

— Annalen der Sternwarte in Leiden. Bd. 7. 1897.

— Flora Battava. Afbeelding en beschrijving van Nederlandsche Gewassen. Aangevangen door Jan Kops, voortgezet door E. W. van Eeden. Afl. 319—322. 1898.

Leipzig. Abhandlungen des Königl. Sächs. Meteorologischen Instituts. Heft 3. 1898.

— Abhandlungen der philolog.-histor. Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 18. No. 2. 3. 1898.

— Abhandlungen der mathemat.-physik. Classe . . . Bd. 24. No. 2—5. 1898.

— Sachregister der Abhandlungen und Berichte der philolog.-histor. Classe. Leipzig 1898.

— Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Philolog.-histor. Cl. Bd. 49. H. 2. 1897. — Bd. 50. H. 1—3. 1898. — Mathemat.-phys. Cl. Bd. 49. H. 5/6. 1897. — Bd. 50. H. 1—4. 1898.

— Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. März 1898.

Leisnig. Mittheilungen des Geschichts- und Alterthums-Vereins zu Leisnig. H. 11. 1898.

Lemberg. Lud. Organ towarzyotwa ludoznawczego we Lwowie. T. 4. Zesz. 1—4. 1898.

Lincoln. University of Nebraska. Bulletin of the Agricultural Experiment Station of Nebraska. Vol. 10. No. 50—54. 1897—98.

Liverpool. Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool. 87. Session. 1897—98. No. 52. 1898.

— Proceedings and transactions of the Liverpool Biological Society. Vol. 12. 1897/98 (1898).

London. Proceedings of the Royal Society of London. Vol. 62. No. 382—388. 1897. — Vol. 63. No. 389—401. 1897—98. — Vol. 64. No. 402—404. 1898.

London. Philosophical transactions of the Royal Society of London. Vol. 187—189. Series A. & B. 1896—97. — Vol. 190. Series A. 1897. — Fellows of the R. S. 1896 (1897).

— Yearbook of the Royal Society of London. No. 1. 1896/97. — No. 2. 1897/98.

— International Catalogue of the scientific literature. Report. March. 30. 1898.

— Monthly notices of the Royal Astronomical Society, containing papers, abstracts of papers and reports of the proceedings of the Society. Vol. 58. No. 2 and Appendix 1898. — Vol. 59. No. 1. 1898.

— Report of Her Majesty's Astronomer at the Cape of Good Hope to the Secretary of the Admiralty f. 1897 (1898). — Independent day number for the year 1898 (1897). — 1899/1900 (1897).

— The Journal of the Linnean Society. Botany. Vol. 33. No. 229—233. 1897. — Zoology. Vol. 26. No. 168—171. 1897.

— Proceedings of the Linnean Society. Session from Nov. 1896 to June 1897 (1897).

— List of the Linnean Society. 1897/98 (1897).

— Transactions of the Linnean Society. Botany. Vol. 5. P. 7/8. 1897. — Zoology. Vol. 7. P. 4. 1897.

— Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 28. 1896/97. No. 609—611. — Vol. 29. 1897/98. No. 612—654.

— List of members of the London Mathematical Society. 12th. Nov. 1897. 34. Sess. 1897—98 (1898).

— Journal of the Royal Microscopical Society for 1898.

— Proceedings of the general meeting for scientific business of the Zoological Society of London. Vol. 14. P. 7. 1898.

Lübeck. Mittheilungen des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. H. 8. No. 1. 2. 1897.

— Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. 7. H. 3. 1898.

Lüttich. Annales de la Société Géologique de Belgique. T. 24. Livr. 2. 1896/97. — T. 25. Livr. 1. 1897/98.

— Mémoires de la Société Royale des Sciences. Sér. 2. T. 20. Bruxelles 1898.

Lund. Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årsskrift. T. 33. Afd. 1. 2. 1897.

— Sveriges offentliga bibliotek. Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog, utgifven af Kongl. Biblioteket genom. E. W. Dahlgren. 12. Stockholm 1897.

— E. W. Dahlgren, Tróars-Register 1886—1895. Ibid. 1896—98.

Luzern. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen des Historischen Vereins der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden, Zug. Bd. 53. Stans 1898.

Lyon. Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. S. T. 4. 1897.

Madison. Transactions of the Wisconsin Academy of sciences, arts and lettres. Vol. 11. 1896—97.

Madras. Madras Government Museum. Vol. 2. No. 2. Anthropology. 1898.

Madrid. Memorias de la R. Academia de ciencias exactas, fisicas y naturales. T. 7—10. 1877—84.

— Discursos leidos ante la R. Academia de ciencias . . . 1897.

— Benito Hernando y Espinosa, Discurso leido en la universidad central. 1898.

Mailand. Memorie dell R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze mor. e stor. Vol. 20 (Ser. 3, 11). Fasc. 6. 1897. — Classe di scienze matem. e natur. Vol. 18. Fasc. 3—5. 1897.

— R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Vol. 30. 1897.

Manchester. Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. Ser. 4. Vol. 12. 1897—98.

Mannheim. Forschungen zur Geschichte Mannheims und der Pfalz. Herausg. vom Mannheimer Alterthumsverein. H. 1. Leipzig 1898.

Marseille. Annales de la Faculté des Sciences de Marseille publiées sous les auspices de la municipalité. T. 8. Fasc. 5—10. 1898.

— Annales de l'Institut (botanico-géologique) colonial de Marseille. Année 4. Vol. 3. Maçon 1896. — Année 5. Vol. 4. Ibid. 1897.

Massachussetto. Tufts College Studies. No. 5. 1898.

Meiningen. Schriften des Vereins für Meiningische Geschichte und Landeskunde. Heft 27—30. 1897—98.

Meissen. Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Stadt Meißen. Bd. 5. Heft 1. 1898.

Melbourne. Proceedings of the Royal Society of Victoria. Vol. 10. P. 2. 1898.

Melbourne. Annual Report of the Secretary for Mines to Minister of Mines of Victoria. Y. 1897.

Meriden-Conn. Proceedings and transactions of the Scientific Association. Vol. 8. 1897/98 (1898).

Messina. Atti della R. Academia Peloritana. Anno XII. 1897—98 (1898).

Metz. Jahrbuch der Gesellschaft für lothringische Geschichte und Alterthumskunde. Jahrg. 9. 1897.

Mexico. Anuario de la Academia Mexicana de ciencias exactas, fisicas y naturales. Anno 2. 1896 (1897).

— D. Mariano de la Barcena, Reseña pres. en la sesion del dia 10. de enero de 1898.

— Boletin mensual del Observatorio Meteorologico Central de Mexico. 1897. Nov.—Dec. — 1898. Jan.-Jul.

— Resumenes mensuales de las observat. meteorol. 1891—92 (1897).

— Memorias y revista de la Sociedad cientificia „Antonio Alzate". T. 11. 1897—98.

Mölln i. Lbg. Vaterländisches Archiv für das Herzogtum Lauenburg. N. F. Bd. 8 (= Archiv des Vereins für die Geschichte des Herzogtums Lauenburg. Bd. 5) Heft 3. 1898.

Montevideo. Anales del Museo Nacional de Montevideo. T. 3. Fasc. 9. 1898.

Montpellier. Mémoires de l'Académie des sciences et lettres. Section de médecine. 2. Série. T. 1. No. 2—4. 1895—96. — Section des lettres. 2. Série. T. 1. No. 5—7. 1896. — T. 2. No. 1. 1898. — Section des sciences. 2. Série. T. 2. No. 2—4. 1895—96.

Moskau. Matematičiskij Sbornik. Recueil mathématique publié par la Société Mathématique de Moscou. T. 20. No. 1. 1897. — No. 2. 1898.

— Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Nouv. Sér. Année 11. No. 3. 4. 1897. — Année 12. No. 1. 1898.

— Otčet o dějatel'iosti chirurgrčeskago otdělenija dětskoj kliniki Imperatorskago Moskovckago Universiteta. 1893/94. — 1894/95. — 1895/96.

— Učen'ija Zapiski Imperaterskago Moskovckago Universiteta.

Otl. jurid. T. 13. 1896. — T. 14. 1897. — Otl. istor.-philol. T. 23. 1896. — Otl. fisico-matem. T. 13. 1896. — Otl. estesto.-istor. T. 14. 1898. — Otl. medicin. T. 12. 1896.

Moskau. Serge Socolow, Des planètes . . . au delà de Mercure et de Neptune. 1897.

München. Abhandlungen der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Histor. Classe. Bd. 21. Abt. 3. 1898. — Philos.-philol. Cl. Bd. 20. Abt. 3. 1897. — Bd. 21. Abt. 1. 1898. — Mathem.-physik. Cl. Bd. 19. Abt. 2. 1898.

— Almanach der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1897 (1897).

— Annalen der Königl. Sternwarte in München. Bd. 3. 1898.

— Sitzungsberichte der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften. Philos.-philol. und histor. Classe. 1897. Bd. 2. Heft 1—3. — 1898. Heft 1—3. — Mathem.-physik. Classe. 1897. Heft 3. — 1898. Heft 1—3.

— Franz Ludwig Baumann, Der bayerische Geschichtsschreiber Karl Meichelbeck. 1669—1734. Festrede 1897.

— Hermann Paul, Die Bedeutung der Deutschen Philologie für das Leben der Gegenwart. Festrede 1897.

— Jahresbericht des Historischen Vereins für Oberbayern. 58—59. 1895—96 (1897).

— Monatsschrift des Historischen Vereins von Oberbayern. Jahrg. 7. H. 1—8. 1898.

Neapel. Atti della R. Academia di scienze morali e politiche. Vol. 29. 1898.

— Rendiconto delle tornate e dei lavori dell' Academia di scienze morali e politiche. Anno 36. 1897.

— Rendiconto dell' Academia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Ser. 3. Vol. 4. Fasc. 1—11. 1898.

— Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle scienze. Ser. 3. T. 10. 1896. — T. 11. 1898.

Neuburg a. D. Neuburger Kollektaneen-Blatt für die Geschichte Bayerns, insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg, hrsg. von dem Historischen Verein Neuburg a. D. Jahrg. 61. 1897.

New Haven. Conn. Journal of the American Oriental Society. Vol. 19, II. 1898.

— Report for the year 1897/98 presented by the Board of Mana-

gers of the Observatory of Yale University to the president and fellows. 1898.

New York. Bulletin of the American Geographical Society of New York. Vol. 30. No. 1—4. 1898.

— Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. 2. Vol. 4. 1897—98. — Vol. 5. No. 1—2. 1898.

New York. Columbia University Bulletin. Mars 1898.

— Columbia University Catalogue. 1897—98.

Nürnberg. Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. Bd. 11 nebst Jahresbericht für 1897 (1898).

— Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1897.

— Katalog der im Germanischen Nationalmuseum befindlichen Gewebesammlung. Bd. 1. 1897.

— Mittheilungen aus dem Germanischen Nationalmuseum. Jahrg. 1897.

— Jahresbericht des Vereins für die Geschichte der Stadt Nürnberg. 18. 1895 (1896). — 19. 1896 (1897). — 20. 1897 (1898).

— Mittheilungen des Vereins für die Geschichte der Stadt Nürnberg. H. 12. 1896.

— Des Hieronymus Braun Prospekt der Stadt Nürnberg vom Jahre 1608. 1896.

Odessa. Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. 21. No. 2. 1897. — T. 22. No. 1. 1898.

— Mémoires de la Section mathématique de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. 18. 1897.

Osnabrück. Mittheilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Bd. 22. 1897.

Ottawa, Can. Geological Survey of Canada. Annual Report. New Series. Vol. 8. 1895. Errata (1897). — Vol. 9. 1896 (1898).

— Contributions to Canadian palaeontology by J. F. Whiteaves. Palaeozoic Fossils. Vol. 3. P. 3. 1897.

Palermo. Annuario del Circolo matematico. Anno XV. 1898.

— Rendiconti del Circolo matematico. T. 12. 1898.

Paris. Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances. 1897.

— Académie des Sciences morales et politiques. Collection des ordonnances des rois de France. Catalogue des actes de François I. T. 6. 1894. — T. 7. 1896.

Paris. Collection du Château de Gotuchów. L'orfèvrie décrite par W. Fröhner. 1897.
— Laplace, Pierre Simon, Oeuvres complètes publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. T. 11. 1895. — T. 12. 1898.
— Société zoologique de France. 595. 79. Ch. Janet, Les fourmis. 1896.
— Ch. Janet, Études sur les fourmis, les guèpes et les abeilles. 12—13. Note. Limoge 1896. — Sur les rapports du Dioscopowa comata Berlese avec le Lasius mixtus Nylander. Sur les rapports de l'Antennophorus Uhlmanni Haller avec le Lasius mixtus Nylander. Extraits des Comptes rendus hebdom. des séances de l'Académie des Sciences. T. 124. 1897.
— A. Des Cloizeaux. Notice nécrologique 1817—97. Par A. Lacroix. 1898.
— Henri Lacroix, Catalogue des monnaies muselmanes de la Bibliothèque nationale. Égypte et Syrie. 1896.

— École franç. d'Athène et de Rome. Bulletin de correspondance hellénique. Année 22. Janv.—Oct. 1898.

— Annales du Musée Guimet. T. 26. Fasc. 2. 3. 1897. — Bibliothèque d'études. T. 6. 1897. — T. 7. 1898.
— L. de Milloué, Petit guide illustr. au Musée Guimet. Nouv. réc. 1894.
— Annales du Musée Guimet. Revue de l'histoire des religions publ. sous la direction de J. Réville. Année 19. 1897. T. 35. — Année 20. 1898. T. 36. No. 1. 2.

— Journal de l'École Polytechnique. 2. Série. Cah. 2. 3. 1897.
— Bibliothèque de la Feuille des Jeunes Naturalistes. Catalogue spécial. No. 1. 1898.
— Bulletin de publications nouvelle de la Librairie Gauthier-Villars et fils. Année 1898. Trm. 1.
— Annuaire de l'Observatoire Municipal de Montsouris. Année 1898.
— Bulletin de la Société Mathématique de France. T. 26. 1898.
Philadelphia. Annals of the American Academy of Political and Social Science. Vol. 11. No. 2. 3. 1897. — Vol. 12. 1898.
— Publications of the American Academy of Political and Social Science. No. 224. 1898.

Philadelphia. Proceedings of the Academy of Natural Science of Philadelphia. 1897. P. 2. 3. — 1898. P. 1.

— Proceedings of the American Pharmaceutical Association. Vol. 45. 1897.

— Alumni Report. Publ. by the Alumni Association of the Philadelphia College of Pharmacy. Vol. 30. No. 3—4. 1893—94. — Vol. 31. 1894—95. — Vol. 33. No. 5—7. 10. 1896—97. — Vol. 34. No. 1—5. 8—11. 1897—98.

— Proceedings of the American Philosophical Society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. 36. No. 156. 1897. — Vol. 37. No. 157. 1898.

— Transactions of the American Philosophical Society . . . New Ser. Vol. 19. P. 2—3. 1898.

— University of Pennsylvania. Bulletin. Vol. 2. No. 1—5. 1898.

— Catalogue of the University of Pennsylvania. 1897/98 1897.

— 16 philosophische Dissertationen.

— Contributions from the Laboratory of the University of Pennsylvania. Botanical Laboratory. Vol. 1. No. 3. 1898. — Zoological Laboratory. Woodworth, On a method of graphic reconstruction etc. Aus: Zeitschrift für wissensch. Mikroskopie. Bd. 14. 1897.

— Publications of the University of Pennsylvania. E. D. Cope. Syllabus of lectures on the vertebrata. 1898. — Mathematics. No. 1. 1898. — Political Economy and Public Law Series. No. 13. 1898.

— Report of the Provost of the University of Pennsylvania. 1896—97. 1897.

— Edw. B. Latch, The mosaic system and the Codex Argenteus. 1898.

Pisa. Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Filosofie e filologia. Vol. 12. 1897.

— Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Processi verbali. Vol. 12. Pg. 11—55. 1898.

— Annuario della R. Universita di Pisa. Per l'anno acad. 1897/98.

Plauen i. V. Mittheilungen des Alterthumsvereins zu Plauen i. V. Jahresbericht 7. 1889.

Porto. Annuario da Academia polytechnica. Anno 19. 1896—97 (1897).

— Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas. Vol. 13. No. 4. Coimbra 1898.

Posen. Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 12. H. 2—4. 1897. — Jahrg. 13. H. 1–2. 1898.

Potsdam. Jahresbericht des Directors des Königl. Preuß. Geodätischen Instituts. 1897/98. Berlin 1898.

— Veröffentlichungen des Königl. Preuß. Geodät. Instituts und Centralbureaus der Internat. Erdmessung. Die Polhöhe von Potsdam. H. 1. Berlin 1898. — Bestimmungen von Azimuten im Harzgebirge. Ebendas. 1898. — Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Von F. R. Helmert. Ebendas. 1898. — Beiträge zur Berechnung von Lotabweichungssystemen. Von L. Krüger. Ebendas. 1898.

— Centralbureau der Internationalen Erdmessung. Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Dezember 1897. Von Th. Albrecht. Berlin 1898.

— Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Bd. 11. 1898.

Prag. Jahresbericht der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften für 1897 (1898).

— Sitzungsberichte der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Cl. für Philosophie, Geschichte und Philologie. Jahrg. 1897 (1898). — Mathem.-naturwiss. Cl. Jahrg. 1897. — Zwei Separatabzüge aus letztern von Franz Rogel. 1897.

— Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag. Jahrg. 58. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 36. 1897/98.

— Sitzungsberichte des deutschen naturwissenschaftlich-medizinischen Vereins für Böhmen „Lotos“ in Prag. Jahrg. 1896 (= Bd. 44). — Jahrg. 1897 (= Bd. 45).

— Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. Im Jahr 1896 (1897). — Im Jahr 1897 (1898).

Regensburg. Forschungen zur Geschichte Bayerns. Bd. 6. H. 1. 1897.

Regensburg. Verhandlungen des Historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. Bd. 50. (N.F. 42) 1898.

Rio de Janeiro. Revista do Museu Nacional do R. (Seguimento aos Ardrivos do Museu Nacional). Vol. 1. 1896.

Rom. Atti della R. Academia dei Lincei. Memorie. Ser. V. Anno 293. 1896. Vol. 4. (1897). — A. 294. 1897. Vol. 5. (1898).

— Atti della R. Academia dei Lincei. Rendiconto dell'adunanza dell 2. Giugno 1897 (1898).

— Atti della R. Academia dei Lincei. Rendiconti. Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Anno 294. 1897. Vol. 6. Sem. 2. Fasc. 11—12 (1897). — A. 295. 1898. Vol. 7. Sem. 1. Fasc. 1—12. Sem. 2. Fasc. 1—10. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. 5. Vol. 6. Fasc. 11—12. 1897. — — Vol. 7. Fasc. 1—6. 1898.

— Atti della R. Academia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Parte 2. Notizie degli scavi. A. 294. 1897. Vol. 5. Nov.—Dec. — A. 295. 1898. Vol. 6. Genn.-Lugl.

Rostock. Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock. Herausg. i. A. des Vereins für Rostocks Alterthümer v. K. Koppmann. Bd. 2. H. 3. 1898.

Salem. Mass. Bulletin of the Essex Institute. Vol. 26. No. 4—12. 1894. — Vol. 27. 1895. — Vol. 28. 1896. — Vol. 29. 1897.

Salzwedel. Jahresbericht des Altmärkischen Vereins für vaterländische Geschichte und Industrie zu Salzwedel. Abt. für Geschichte. Bd. 24. H. 2. 1897. — Bd. 25. 1898.

San Francisco. Proceedings of the California Academy of Sciences. Ser. 3. Zoology. Vol. 1. No. 4—5. 1898. — Botany. Vol. 1. No. 2. 1898. — Geology. Vol. 1. No. 2. 3. 1898.

— Occasional papers of the California Academy of Sciences. T. 5. 1897.

San Paulo. Boletin da commissão geographica e geologica do estado de S. Paulo. No. 10—14. 1895—97.

— Revista do Museu Paulista, publ. por H. von Jhering. Vol. 2. 1897.

Santiago (Chile). Actes de la Société Scientifique du Chili. T. 7. Livr. 2—4. 1897.

St. Gallen. Mittheilungen zur vaterländischen Geschichte. Herausg. vom Historischen Verein in St. Gallen. Bd. 27 (= 3. F. 7). H. 1. 1898.

— Karl Nef, Ferdinand Fürchtegott Huber. Ein Lebensbild = Neujahrsblatt des Historischen Vereins von St. Gallen. 1898.

St. Louis. Missouri Botanical Garden. Annual Report. 8. 1897. — 9. 1898.

St. Petersburg. Annuaire du Musée Zoologique. 1897. No. 4. — 1898. No. 1.

— Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Sér. 5. T. 7. No. 2—5. 1897. — T. 8. No. 1—4. 1898.

— Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Cl. phys.-mathém. Ser. 8. Vol. 5. No. 6—13. 1897. — Vol. 6. No. 1—8, 10. 1898. — Cl. histor.-philol. Vol. 1. No. 7. 1897. — Vol. 2. No. 1—2. 1897. — Vol. 3. No. 1. 1898.

— *Βυζαντινὰ χρονικά.* T. 4. No. 3/4. 1897. — T. 5. No. 1/2. 1898.

— Izvěstija imperatorskago russkago geografičeskago obščestva. T. 33. No. 4—6. 1897. — T. 34. No. 1—4. 1898.

— Otčet imperatorskago russkago geografičeskago obščestva. 1897 (1898).

— Sbornik otdělenija russkago jazyka i slovesnosti imperatorskoj akademii nauk. T. 62. 1897. — T. 63. 1897.

Schaffhausen. Neujahrsblatt des Kunstvereins und des Historisch-antiquarischen Vereins zu Schaffhausen für 1889—1891 (1888—1890).

Siena. Bullettino Senese di Storia patria. Anno 5. Fasc. 1—2. 1898.

Speyer. Mittheilungen des Historischen Vereins der Pfalz. 22. 1898.

Stavanger. Stavanger Museums Aarsberetning for 1897 (1898).

Stockholm. Konglika Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bd. 29. 1896—97. — Bd. 30. 1897—98. — Bihang. Bd. 23. 1897—98.

— Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Arg. 54. 1897 (1898).

— Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda pä Stockholms Observatorium utgifna af Hugo Gyldén. Bd. 6. H. 3. 1898.

— Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Academiens Månadsblad. Bd. 7. Arg. 23. 1894.

— Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Utgifven af Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademien. Deel 16. No. 4. 1897.

Strassburg. Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsaß-Lothringens, hrsg. von dem Historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Jahrg. 14. 1898.

Stuttgart. Württembergische Vierteljahrshefte für Landesge-

schichte, hrsg. von der Württemberg. Kommission für Landesgeschichte. Jahrg. 7. 1898.

Sydney. Journal and Proceedings of the R. Society of New South Wales. Vol. 31. 1897.

— Annual Report of the Department of Mines and Agriculture of New South Wales for the year 1897 (1898).

— Records of the Geological Survey of New South Wales. Vol. 5. P. 4. 1898.

— Mineral Resources. 1898 No. 1—4.

Throndhjem. Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1897.

— Festskrift udgivn i anledning af Throndhjems 900. Aarsjubilaeum 1897 af de Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1897.

Tiflis. Beobachtungen des Tifliser Physikalischen Observatoriums i. J. 1896 (1898).

Tokio. Mittheilungen der Deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Suppl.-Hefte zu Bd. 6: P. Ehmann, Sprichwörter und bildliche Ausdrücke der japanischen Sprache. Th. 3. (K—Od) 1898. — Th. 4. (Od—Tan). 1898. — Neuerworbene Bücher S. 1—16.

— Mittheilungen aus der Medizinischen Fakultät der Kaiserl.-Japanischen Universität. Bd. 3. No. 3. — Bd. 4. No. 1—2. 1898.

— Tokyo Sugaku Butsurigaku Kwai Kiji. Maki No. 8. Dai 2. 3.

Toronto. Proceedings of the Canadian Institute. Vol. 1. P. 1. No. 4/5. 1898.

— Annual Report of the Canadian Institute. 6. Session. 1892/93.

— Transactions of the Canadian Institute. Vol. 5. No. 1. Suppl. No. 2. 1895.

Turin. Atti della R. Academia delle scienze di Torino. Vol. 33. 1897/98.

— Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1897 all' Osservatorio della R. Università di Torino. 1898.

Upsala. Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala. Vol. 3. 1896. P. 2. (1898).

— Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique d'Université d'Upsal. Vol. 29. 1897—98.

— Etudes internationales des nuages. 1896—97 (1898).

Upsala. Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser. 3. Vol. 17. Fasc. 2. 1898.

— Skrifter utgifna af Humanistiska Vetenskaps Samfundet i Ups. Bd. 5. 1897.

Washington. Smithsonian Institution. United States National Museum. Bulletin No. 39. P. H—L. 1897.

— Proceedings of the United States National Museum. Vol. 19. 1897.

— Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution. Report of the National Museum for the year ending June 30. 1895 (1897).

— Report of the Secretary of Agriculture. 1898.

— Report of the Superintendent of the United States Naval Observatory. 1894 (1895). — 1897.

— Report of the Superintendent of the United States Coast and Geodetic Survey showing the progress. Y. 1896. P. 1. 2. (1897).

— Bulletin of the United States Geological Survey. No. 87. 1892.

— Monographs of the United States Geological Survey. Vol. 25—28 und Atlas. 1895—97.

— Annual Report of the United States Geological Survey to the Secretary of the Interior. 17. 1895—96. P. 1. 2. (1896).

— Geological Atlas of the United States. Fol. 7. 13—37. 1896—97.

Werden. Beiträge zur Geschichte des Stiftes Werden. Hrsg. von dem Historischen Verein für Werden. H. 6. 1897.

Wien. Almanach der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 47. 1897.

— Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-Histor. Cl. Bd. 45. 1897.

— Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-Histor. Cl. Bd. 136. 1897. — Bd. 137. 1897. — Mathem.-naturwiss. Cl. Abth. I. Bd. 105—107. 1896—98. — Abth. II^a. Bd. 105—107. 1896—98. — Abth. II^b. Bd. 105—107. 1896—98. — Abth. III. Bd. 105—106. 1896—97. — Register zu Bd. 101—105. 1897.

— Archiv für oesterreichische Geschichte. Hrsg. v. d. zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission der K. Akad. Bd. 84. 1897/98. — Register zu Bd. 51—80. 1897.

— Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen der Landes-

stationen in Bosnien-Hercegovina. Hrsg. von der Bosnisch-Hercegovinischen Landesregierung. Im Jahre 1896 (1897).

Wien. Jahrbücher der k. K. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Bd. 31. Th. 2. 1894 (1898). — Bd. 34. Th. 1. 1897 (1898).

— Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. von der Oesterreich. Gesellschaft für Meteorologie und der Deutschen Meteorologischen Gesellsch. Jahrg. 15. H. 1—11. 1897.

— Astronomische Arbeiten des k. K. Gradmessungs-Bureau. Bd. 9. Längenbestimmungen. 1897.

— Publicationen für die internationale Erdmessung. Herausg. von dem k. K. militär-geographischen Institut. Die Astronomisch-geodätischen Arbeiten. Bd. 10—11. 1897. — Bd. 12. 1898.

— Abhandlungen der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Bd. 17. H. 4. 1897.

— Jahrbuch der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Bd. 47. H. 2—4. 1897. — Bd. 48. H. 1. 1898.

— Verhandlungen der k. K. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1897. No. 14—18. — Jahrg. 1898. No. 1—13.

— Verhandlungen der k. K. Zoologisch-Botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 48. No. 1—8. 1898.

— Schriften des Vereins zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien. Bd. 38. 1897/98.

Wiesbaden. Annalen des Vereins für Nassauische Alterthumskunde und Geschichtsforschung. Bd. 29. H. 2. 1898.

— Mittheilungen des Vereins für Nassauische Alterthumskunde und Geschichtsforschung an seine Mitglieder. 1898 No. 3—4. — 1898/99. No. 1—3.

— Jahresbericht der Historischen Kommission für Nassau. 1. 1898.

— Jahrbücher des Nassauischen Vereins für Naturkunde. Jahrg. 51. 1898.

Würzburg. Archiv des Historischen Vereins von Unterfranken u. Aschaffenburg. Jahrg. 39. 1897.

— Jahresbericht des Historischen Vereins von Unterfranken u. Aschaffenburg. 1896 (1897).

— Sitzungsberichte der Physikalisch-Medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Jahrg. 1897. No. 3—9. — Jahrg. 1898. No. 1—3.

Würzburg. Verhandlungen der Physikalisch-Medicinischen Gesellschaft zu Würzburg. Bd. 31. No. 8—11. 1898.

Zürich. Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Bd. 24. H. 5. Leipzig 1898.

— Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Suppl.-Jahrg. 42. H. 3—4. 1897. — Jahrg. 43. H 1—3. 1898.

— Jahresbericht der Physikalischen Gesellschaft zu Zürich. 9. 1896—97.

— Astronomische Mittheilungen. Von Dr. Rudolf Wolf. [S.-A.] No. 89. 1898.

— Internationale Erdmessung. Das Schweizerische Dreiecksnetz hrsg. von der Schweizerischen Geodätischen Kommission. Bd. 8. 1898.

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Abû Zakarîyyâ Yaḥyâ ibn Dâwud kuas Hayyûg, Weak and geminative verbs in hebrew etc. ed. M. Jastrow. Leide 1897.

Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Bd. 22. H. 1/2. 1898.

Ambronn, L., Messungen des Löwenbogens zum Zwecke der Untersuchung systematischer Fehler bei Heliometermessungen. [S.-A. aus „Astronomische Nachrichten" Bd. 145].

Americana germanica. A quarterly devoted to the comparative study of the literary, linguistic and other cultural relations of Germany and America. Vol. 1. No. 3. 4. New York & London 1897. — Vol. 2. No. 1. ib. 1898.

Annalen, Mathematische. Generalregister zu Bd. 1—50. Zusgest. v. A. Sommerfeld. Leipzig 1898.

Ball, Robert, The twelfth and concluding memoir on the theory of serews. Dublin 1898 [S.-A.].

Bashforth, Francis, Replica di Krupp alla protesta del Sign. Bashforth, transl. with notes. Cambridge 1898.

Beilsteln, F., Handbuch der organischen Chemie. 3. Aufl. Bd. 4. Lief. 9—20. Hamburg & Leipzig 1898.

Bibliographie générale de l'astronomie par S. C. Houzeau et A. Lancastre. T. 1. P. 2. Bruxelles 1889.

Brandes, W., Flora der Provinz Hannover. Hannover & Leipzig 1897.

Brandis, W., Rechtsschutz der Zeitungs- und Bücher-Titel. Berlin 1898.

Bunker, F. S., On the structure of the sensory organes. [S.-A. aus „Anatomischer Anzeiger" XIII, H. 8/9. 1897].

Cabreira, Antonio, Sur l'aire. Des polygones. Lisboa 1897.

— — Sur les vitesses. Sur la spirale. Ibid. 1898.

Campion, Henry, The secret of the poles. Birmingham 1898.

Cauchy, Augustin, Oeuvres complètes. Sér. 1. T. 10. 1897.

Cayley, Arthur, Collected mathematical papers. Suppl.-Vol. Cambridge 1898.

Centralzeitung für Optik und Mechanik. Jahrg. 18. No. 1. Berlin 1898.

Conklin, Edwin Grant, The embryology of crepidula. Boston 1897 [S.-A.].

Curtze, Maximilian, Petri Philomeni de Dacia in algorismum vulgarem Johannis de Sacrobono commentarius. Hafniae 1897.

Daubrée, Auguste, 25. Juin 1814—29. Mai 1896. De la part des Enfants de M. Daubrée. Maçon 1896/97.

Dawson, Sam. Edw., The voyages of the cabots. From the transactions of the R. Soc. of Canada for 1897. Ottawa 1897.

Denisov, S., Dochmii u Aeschyla. Charkow 1898.

Dyck, Walther, Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und der angewandten Mathematik. München 1897.

Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. Hrsg. v. H. Burkhardt und W. F. Meyer. Teil 1. Bd. 1. H. 1. Leipzig 1898.

Galilei, Galileo, Opere. Ediz. nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. 7. Firenze 1897. — Vol. 8. ib. 1898.

Geschichtsblätter, Schönburgische. Vierteljahrsschrift. Bd. 4. H. 3. Waldenburg 1898.

Hildebrandsson, H. Hildebrand, et Léon Teisserenc de Bort, Les bases de la météorologie dynamique. Livr. 1. Paris 1898.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. Emil Lampe. Bd. 26. Jahrg. 1895. H. 3. 1898. — Bd. 27. Jahrg. 1896. H. 1—2. 1898.

Journal of physical chemistry. Vol. 1. No. 8—12. Ithaca, London, Leipzig 1896. — Vol. 2. No. 1—6. Ib. 1897. — Wildern D. Bancroft, The Phase Rule. Ib. 1897.

Journal, Buffalo medical and surgical. Vol. 37. No. 10. 1897.

— The American monthly microscopical, containing contributions to biology. Vol. 9. No. 9—12. Washington 1888. — Vol. 18. No. 4. Ib. 1897.

Koelliker, Albert v., Gegen die Annahme von Axencylindertropfen. [S.-A. aus „Anatomischer Anzeiger" Bd. 14. H. 24]. 1898.

— — [Bemerkungen]. Aus: Verhandlungen der Anatomischen Gesellschaft auf der 12. Versammlung in Kiel. 1898.

Kosmopolan. A bimensal gazette for furthering the spread of volapük and for world-wide-avertisement. List of 1891—97. Sidney 1898.

Krok. Časopis Věnovaný Veškerým Potřebám středního školstva. Ročnik 12. 1—5. 1898.

La Mantia, Vito, I privilegi di Messina (1129—1816). Note storiche con documenti inediti. I privilegi dei re Normanni (Estratto). Palermo 1897.

Lemaine, M. E., Drei Separatabzüge mathematischen Inhalts. 1895—96.

Lomonosov, M. B., Sočenija ed. M. S. Sunomlunov. T. 4. St. Petersburg 1898.

Magazin, Braunschweigisches. Hrsg. v. Dr. Paul Zimmermann. Jahrg. 1897. Bd. 3. Braunschweig 1897.

Mark, E. L., A table of ocular micrometer values. [S.-A. aus: „Journal of applied microcospy"] 1898.

Meyran, O., Les noms de genre. Lyon.

Microscope, The. Vol. 8. No. 6, 7, 9, 10. Washington 1888. — Vol. 10. No. 10. Ib. 1890. — Vol. 12. No. 5. Ib. 1892. — New series Vol. 5. No. 5. Ib. 1897.

Nature. A weakly illustrated journal of science. Vol. 57. No. 1470—1489. London & New York 1897/98. — Vol. 58. No. 1490—1510. — Vol. 59. No. 1511—1519. Ib. 1898.

Pâris, Le Vice-Amiral, Souvenirs de Marine. Partie 1—5. Paris 1882—92.

Porter, J. F., Two new Gregavinida [S.-A. aus: „Journal of morphology" Vol. 14]. Boston 1897.

Pyl, Theodor, Nachträge zur Geschichte der Greifswalder Kirchen. Heft 2. Greifswald 1899.

Revue historique. Année 23. T. 66. No. 2. Paris 1898.

Riemann, Oeuvres mathématiques, trad. p. L. Langel avec une préface de M. Hermite et un discours de M. Félix Klein. Paris 1898.

Rosenbusch, H., Elemente der Gesteinslehre. Stuttgart 1898.

Saint-Lager, Notice sur Alexis Jordan. Paris 1898.

— Genre grammaticale des noms génériques. Grandeur et décadence du nord. Paris 1897.

Sars, G. O., An account of the crustacea of Norway. Vol. 2. P. 9—12. Bergen 1898.

Tageblatt der Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte. 67—69. Versammlung. 1895—97.

Thiele, Günther, Kosmogonie und Religion. Antrittsvorlesung. Berlin 1898.

Weber, Heinrich, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. Bd. 1. Braunschweig 1898.

Wilkens, Friedrich, Zum hochalemannischen Konsonantismus. Leipzig 1891.

Wissen, Unser. Bilder aus Natur und Leben. Monatsschrift herausgegeben in Verbindung mit Fachmännern von Hans Fehlinger. Bd. 1. H. 1—2. Wien 1898/99.